



Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана

## **Методические указания**

**А.И. Лошкарев, Т.В. Облакова**

# **ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

А.И. Лошкарев, Т.В. Облакова

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Методические указания  
к выполнению домашнего задания*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2007

УДК 517.3  
ББК 22.161  
Л81

Рецензент *Л.Д. Покровский*

- Л81** **Лошкарев А.И., Облакова Т.В.**  
Интегральные преобразования и операционное исчисление: Метод. указания к выполнению домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 74 с.: ил.

Представлен справочный теоретический материал, решенные задачи и примеры, условия вариантов типового расчета по интегральным преобразованиям и операционному исчислению. Типовой расчет содержит задачи по темам: нахождение изображений и оригиналов, задачи Коши для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для студентов 2–4-го курса машиностроительных специальностей.

Ил. 18. Библиогр. 9 наим.

**УДК 517.3**  
**ББК 22.161**

*Методическое издание*

**Анатолий Иванович Лошкарев**  
**Татьяна Васильевна Облакова**

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Редактор *С.А. Серебрякова*  
Корректор *Л.И. Малютина*  
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 15.01.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.  
Печ. л. 4,5. Усл. печ. л. 4,19. Уч.-изд. л. 3,85. Тираж 1000 экз. Изд. № 134.  
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007

## ВВЕДЕНИЕ

В различных приложениях большое значение имеют интегральные преобразования, т. е. функциональные преобразования вида

$$F(p) = \int_C K(p, t) f(t) dt, \quad (\text{В.1})$$

где  $C$  — некоторый заданный контур (конечный или бесконечный) в комплексной плоскости;  $K(p, t)$  — заданная функция двух комплексных переменных (ядро интегрального преобразования). При этом функция  $f(t)$ , называемая *оригиналом*, переводится в функцию  $F(p)$ , называемую *изображением*.

В качестве дискретного аналога преобразования (В.1) можно рассматривать, например, ряд Фурье по заданной системе функций  $\{\varphi(x, k)\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$ :

$$\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f_k \varphi(x, k).$$

При этом последовательность (функция целого аргумента)  $f_k = f(k)$  переводится в функцию  $\Phi(x)$ .

Прикладное значение интегральных преобразований, при которых изучаемые функции (оригиналы) заменяются другими функциями (изображениями), можно сравнить с логарифмированием в вычислительной практике. Действительно, при логарифмировании: 1) от чисел переходят к логарифмам; 2) над логарифмами выполняют действия, соответствующие действиям над числами, причем умножению чисел соответствует более простая операция сложения

их логарифмов и т. д.; 3) от найденного логарифма вновь возвращаются к числу.

Использование интегральных преобразований позволяет свести, например, решение дифференциального уравнения к решению алгебраического уравнения для изображений, после чего остается восстановить решение-оригинал по решению-изображению. Последний этап обычно осуществляется с использованием обширных таблиц типа «оригинал — изображение».

В этом пособии мы рассмотрим наиболее употребительные преобразования вида (В.1) — преобразование Фурье и (одностороннее) преобразование Лапласа, на основе которых строится операционное исчисление. О других видах интегральных преобразований можно прочесть в [1 — 3].

## 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

### 1.1. Ряд Фурье и интегральная формула Фурье

Как известно, если задан интервал разложения  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ , то ряд Фурье, порожденный действительной функцией  $f(t)$ , для которой существует интеграл  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt$ , есть бесконечный тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \equiv \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \quad (1.1)$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos(k\omega_0 \tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \sin(k\omega_0 \tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$c_k = \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-ik\omega_0\tau} d\tau \quad (1.3)$$

(черта сверху, как обычно, означает комплексно-сопряженное число).

Также известно, что если  $f(t)$  — функция с ограниченным изменением (вариацией<sup>1</sup>), то ее ряд Фурье сходится к значению  $\frac{1}{2} \{f(t+0) + f(t-0)\}$ . Причем если во всех точках некоторого интервала  $f(t)$  непрерывна, то ее ряд сходится к ней самой (равномерно на этом интервале). Подставив в (1.1) выражения для  $a_k$  и  $b_k$  из (1.2), получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos \frac{2\pi k}{T} (t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Вариацией (полной вариацией) функции называют  $\sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ , вычисленный по всем разбиениям  $-\frac{T}{2} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \frac{T}{2}$  отрезка  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  на конечное число частей.

Вариацию функции на отрезке  $[a, b]$  обозначают символом  $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$  или  $\int_a^b |df(x)|$ . В частности, если функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную, то  $\int_a^b |df(x)| = \int_a^b |f'(x)| dx$ .

Если положить  $\frac{2\pi k}{T} = \omega$ ,  $\frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$  и перейти формально к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , то сумма превратится в интеграл, и мы получим интегральную формулу Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

поскольку подынтегральная функция — четная по переменной  $\omega$ .

**З а м е ч а н и е.** Совершая предельный переход  $T \rightarrow \infty$  в указанных выражениях, мы фактически полагаем, что внешний несобственный интеграл понимается в смысле существования его главного значения<sup>2</sup>, т. е. в симметричном стремлении к бесконечности абсолютной величины верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Подставив в (1.1) выражение (1.3) для  $c_k$ , на отрезке  $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$  будем иметь представление

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Как и раньше, переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

---

<sup>2</sup>В ряде случаев даже расходящимся несобственным интегралам можно приписать определенное значение. Если существует предел  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} f(t) dt = A$ , то его называют главным значением несобственного интеграла и обозначают  $\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ . Например,  $\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \Big|_{-N}^N = 0$ .



Обозначим в этом выражении через

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.4)$$

Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.5)$$

Соотношения (1.4) и (1.5) определяют так называемую пару преобразований Фурье, где (1.4) называется прямым преобразованием Фурье, а (1.5) — обратным преобразованием Фурье.

**З а м е ч а н и е.** Функцию  $\hat{f}(\omega)$  также часто обозначают  $S(\omega)$  и называют спектральной плотностью или спектральной характеристикой сигнала  $f(t)$ . Тогда равенство (1.4) интерпретируют как спектральное разложение  $f(t)$ .

Вообще говоря,  $S(\omega)$  — комплексная функция, поэтому для ее изображения требуются две функции:  $S(\omega) = |S(\omega)| e^{i \arg S(\omega)} = \rho(\omega) e^{-i\Phi(\omega)}$ , где  $\rho(\omega) = |S(\omega)|$  называется амплитудным спектром, а  $\Phi(\omega) = -\arg S(\omega)$  — фазовым спектром [4].

## 1.2. Некоторые свойства преобразования Фурье

**1. Теорема запаздывания.** Если  $\hat{f}(\omega)$  — преобразование Фурье функции  $f(t)$ , то преобразованием Фурье функции  $f(t - \tau)$  будет произведение  $e^{-i\omega\tau} \hat{f}(\omega)$ .

Утверждение этой теоремы следует из очевидного равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u+\tau)} du = \\ &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du = e^{-i\omega\tau} \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

**2. Теорема смещения.** Если  $\hat{f}(\omega)$  — преобразование Фурье функции  $f(t)$ , то преобразованием Фурье произведения  $e^{-i\eta t} f(t)$  будет функция  $\hat{f}(\omega + \eta)$ .

В самом деле, 
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\eta t}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega+\eta)t}dt =$$

$$= \hat{f}(\omega + \eta).$$

**3. Дифференцирование оригинала.** Если  $\hat{f}(\omega)$  — преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции  $f(t)$ , то преобразованием Фурье производной  $f'(t)$  будет функция  $i\omega\hat{f}(\omega)$  при условии, что производная также является абсолютно интегрируемой функцией.

Этот факт доказывается с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}df(t) = \\ &= e^{-i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega\hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Здесь  $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$  в силу ее абсолютной интегрируемости.

Если же и  $f^{(n)}(t)$  является абсолютно интегрируемой функцией, то,  $n$  раз применяя интегрирование по частям, получим:  $\hat{f}^{(n)}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$ .

В частности,  $\hat{f}''(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$ .

**4. Теорема свертывания.** Если  $\hat{f}(\omega)$  — преобразование Фурье функции  $f(t)$ , а  $\hat{g}(\omega)$  — преобразование Фурье функции  $g(t)$ , то произведение  $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$  является преобразованием Фурье от свертки

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \times$$

$$\begin{aligned} \times \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau = (f * g)(t). \end{aligned}$$

Таким образом, функции  $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$  и  $(f * g)(t)$  являются парой преобразований Фурье, что и доказывает теорему.

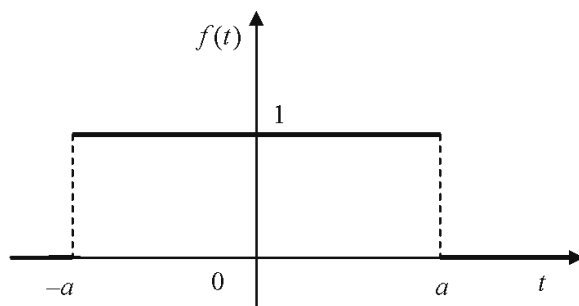
**5. Дифференцирование по параметру.** Если  $f(t, \alpha)$  и  $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$  являются абсолютно интегрируемыми на  $\mathbb{R}$ , то операции дифференцирования по параметру  $\alpha$  и преобразования Фурье по переменной  $t$  перестановочны, т. е.  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \alpha) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha) \times e^{-i\omega t} dt$ .

### 1.3. Примеры вычисления преобразования Фурье

**Пример 1.1.** Найти преобразование Фурье прямоугольного импульса  $f(t) = \theta(a - |t|)$ . Имеем:

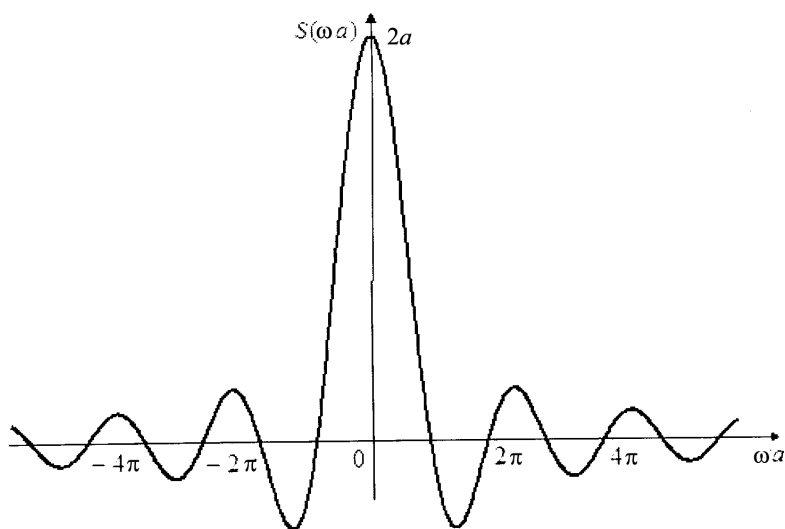
$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(a - |t|) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}{-i\omega} = \frac{2a \sin \omega a}{\omega a}. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Графики функции  $f$  и его преобразования Фурье  $\hat{f}$  показаны на рис. 1.1 и 1.2.



**Рис. 1.1**

При этом, очевидно, амплитудный спектр  $\rho(\omega) = \left| \frac{2a \sin \omega a}{\omega} \right|$ , а фазовый принимает значения 0 или  $-\pi$  в зависимости от знака  $S(\omega)$ . Графики этих функций показаны на рис. 1.3 и 1.4.



**Рис. 1.2**

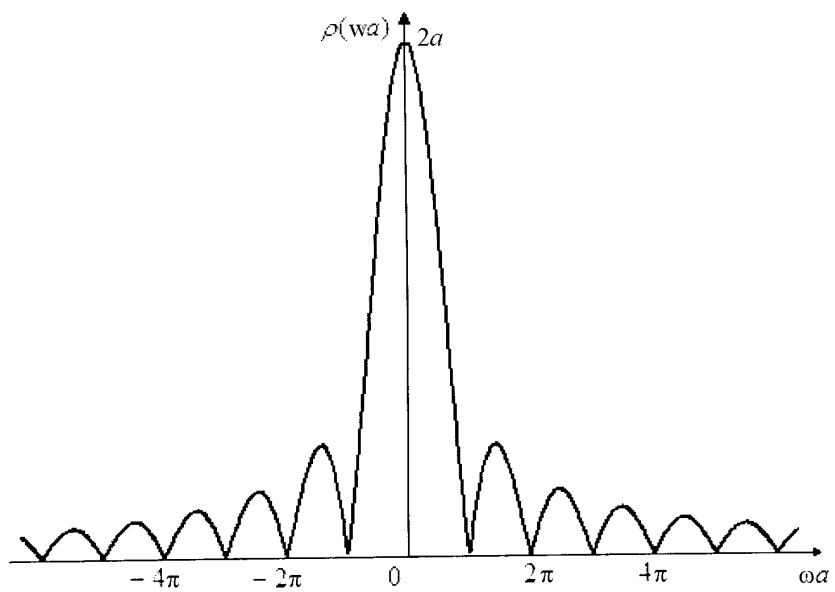


Рис. 1.3

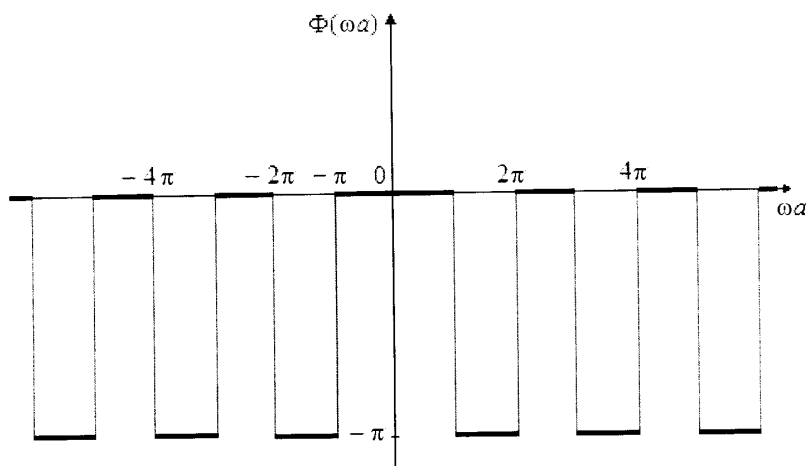


Рис. 1.4

**Пример 1.2.** Найти преобразование Фурье от функции  $f(t) = Ae^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-i\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{2a^2} + 2\frac{t}{\sqrt{2a}} \frac{i\omega a}{\sqrt{2}} - \frac{\omega^2 a^2}{2}\right)} e^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \left(\frac{t}{\sqrt{2a}} + \frac{i\omega a}{\sqrt{2}}\right) = u \\ dt = \sqrt{2}adu \end{array} \right| = A\sqrt{2}ae^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}} \int_{\operatorname{Im}u = \frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{-u^2} du = \\ &= A\sqrt{2}ae^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = A\sqrt{2\pi}ae^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}}. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство в этой цепочке имеет место в силу теоремы Коши из комплексного анализа. В самом деле, рассмотрим контур  $C_R = C'_R \cup C''_R \cup l_R^+ \cup l_R^-$ , изображенный на рис. 1.5. Здесь  $l_R^\pm$  — дуги окружности радиуса  $R$ , заключенные между действительной осью и прямой  $\operatorname{Im}u = \frac{\omega a}{\sqrt{2}}$ . Поскольку подынтегральная функция везде аналитична,  $\int_{C_R} e^{-u^2} du = 0$ . А поскольку интегралы

по дугам  $l_R^\pm$  стремятся к нулю в силу леммы Жордана<sup>3</sup>, получаем в пределе равенство интегралов  $\int_{\operatorname{Im}u = \frac{\omega a}{\sqrt{2}}} e^{-u^2} du$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$ .

Итак,  $\hat{f}(\omega) = A\sqrt{2\pi}ae^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}}$ , т. е., пользуясь радиотехнической терминологией, спектральная плотность «колоколообразного» импульса  $f(t) = Ae^{-\frac{t^2}{2a^2}}$  имеет ту же форму (рис. 1.6).

<sup>3</sup>Лемма (К. Жордан). Если на некоторой последовательности дуг окружностей  $C_{R_n}: |z| = R_n, \operatorname{Im}z > -b$  ( $R_n \rightarrow \infty, b$  фиксировано) функция  $g(z)$  стремится к нулю равномерно относительно  $\arg z$ , то для любого положительного числа  $\lambda$

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

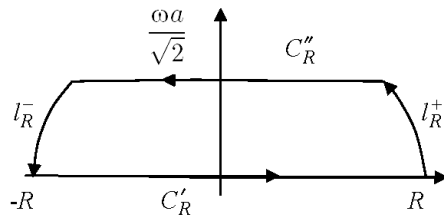


Рис. 1.5

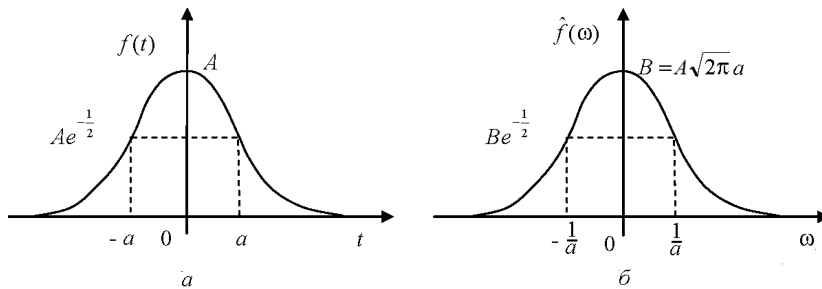


Рис. 1.6

**Пример 1.3.** Найти преобразование Фурье от функции  $f(t) = e^{it^2}$  ( $t$  — действительное).

По определению  $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} e^{-i\omega t} dt$ .

Выделяем полный квадрат и делаем линейную замену переменных (сдвиг на  $\frac{\omega}{2}$  вдоль действительной оси):

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2 - 2t\frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4})} e^{-i\frac{\omega^2}{4}} dt = \\ &= e^{-i\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t - \frac{\omega}{2})^2} d(t - \omega/2) = e^{-i\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz^2} dz. \end{aligned}$$

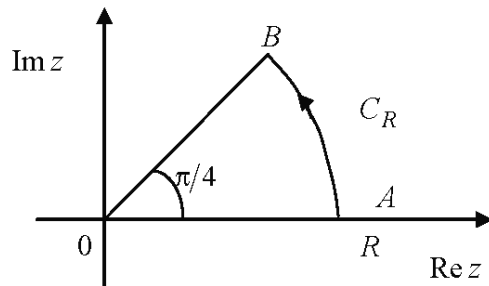


Рис. 1.7

Далее рассмотрим контур, изображенный на рис. 1.7, и вычислим с его помощью  $\int_0^{+\infty} e^{iz^2} dz$  вдоль действительной полуоси. С одной стороны, поскольку подынтегральная функция аналитична, интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю. С другой стороны, он равен

$$\int_{0R} e^{iz^2} dz + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_{B0} e^{iz^2} dz.$$

Первое слагаемое при  $R \rightarrow \infty$  стремится к  $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ .

Во втором интеграле заменим  $z^2 = u$ ,  $dz = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ , после чего станет ясно, что преобразованный интеграл  $\int_{C'_R} \frac{e^{iu} du}{2\sqrt{u}}$  по лемме Жордана стремится к нулю.

В третьем интеграле введем переменную  $s = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z = e^{-i\frac{\pi}{4}}z$ . Тогда  $s^2 = -iz^2$ ,  $dz = e^{i\frac{\pi}{4}}ds$ , и третий интеграл превратится в



$e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-s^2} ds$ , т. е. предел третьего слагаемого при  $R \rightarrow \infty$  равен  $-e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Следовательно, вдоль действительной полуоси  $\int_0^{+\infty} e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , откуда в силу четности по  $t$  подынтегральной функции  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}$ . Отсюда окончательно  $\hat{f}(\omega) = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{4}\right)} \sqrt{\pi}$ .

#### 1.4. Бесконечно короткий импульс с единичной площадью. $\delta$ -функция

В целом ряде случаев, имеющих значительный практический интерес, целесообразно рассмотреть функции, получающиеся в результате предельного перехода при стремлении ширины (длительности) импульса к нулю, но при сохранении его площади. Такая ситуация возникает, например, при рассмотрении функции, описывающей распределение удельного давления по площадке, на которую действует постоянная сила, при стремлении площади этой площадки к нулю.

В динамике материальной точки результат действия силы  $\vec{f}(t)$ , зависящей от времени, определяется ее механическим импульсом  $m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(t) dt$ , где  $m$  — масса материальной точки, а  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  — скорости материальной точки в начале и конце действия силы. Если сила действует сравнительно короткое время, то имеет смысл представить ее действие в виде конечного импульса прямоугольной формы (см. график функции  $f_1(t) = |\vec{f}(t)|$  на рис. 1.8). Тогда при  $\tau_n \rightarrow 0$

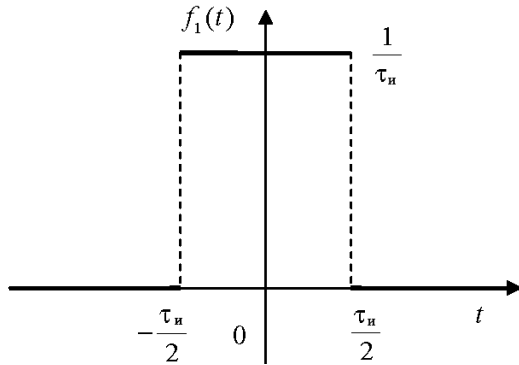


Рис. 1.8

$$\lim_{\tau_n \rightarrow 0} f_1(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

при одновременном выполнении условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.8')$$

Из примера 1.1 следует, что  $\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{\tau_n} \frac{2 \sin \frac{\tau_n}{2} \omega}{\omega}$ .

Тогда при  $\tau_n \rightarrow 0$   $\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{\tau_n} \frac{2 \sin \frac{\tau_n}{2} \omega}{\omega} = \frac{\sin \frac{\tau_n}{2} \omega}{\frac{\tau_n \omega}{2}} \rightarrow 1$  в силу

первого замечательного предела, т. е.  $\hat{\delta}(\omega) \equiv 1$ .

Тот же результат можно получить, переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$  в выражении для функции  $f(t) = Ae^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ , рассмотренной в примере 1.2. Если принять  $A = 1$ , то в силу интеграла Пуассона

получим, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt = \sqrt{2\pi}a$ . Введем  $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ ,

при этом

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_2(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt = 1. \quad (1.9')$$

Согласно примеру 1.2, для преобразования Фурье от  $f_2(t)$  получаем

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \sqrt{\pi 2a^2} e^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}} = e^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1.$$

Таким образом, спектральной плотностью  $\delta(t)$  является тождественная единица.

Далее, используя сходные рассуждения, можно получить, что для любой непрерывной функции  $f(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) f(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(\tau + t) d\tau = \lim_{\tau_n \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f(\tau + t) d\tau = \\ &= \lim_{\tau_n \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_n} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} f(\tau + t) d\tau = \lim_{\tau_n \rightarrow 0} f(\tilde{\tau} + t) = f(t), \end{aligned}$$

так как  $\tau$  — немая переменная интегрирования. Здесь  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau_n)$  — точка на интервале  $\left(-\frac{\tau_n}{2}, \frac{\tau_n}{2}\right)$ , существующая в силу теоремы о среднем для определенного интеграла. Последнее равенство имеет место в силу непрерывности функции  $f(t)$ . Таким образом, получаем основное свойство  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(t - \tau) d\tau = f(t). \quad (1.10)$$

При записи выражения (1.10) использовано свойство свертки

(см. с. 9). В частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(\tau) d\tau = f(0). \quad (1.11)$$

Свойство (1.10) называют также фильтрующим свойством  $\delta$ -функции.

Используя (1.11), можно также заключить, что преобразование Фурье от  $\delta$ -функции есть тождественная единица. В самом деле,

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega 0} = 1.$$

Кроме того, преобразование Фурье от смещенной  $\delta$ -функции согласно (1.10) равно  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) e^{-i\omega \tau} d\tau = e^{-i\omega t_0}$ .

Наконец, применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (1.12)$$

По аналогии с этим выражением можно записать

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau. \quad (1.13)$$

**З а м е ч а н и е.** Равенства (1.13) или (1.11) часто считаются определением  $\delta$ -функции при более систематическом и строгом изложении теории так называемых обобщенных функций (см. например [5]).

Впервые  $\delta$ -функция была введена знаменитым физиком П. Дираком, поэтому ее часто называют  $\delta$ -функцией Дирака, а также импульсной функцией, или единичным импульсом.

### 1.5. Первообразная от $\delta$ -функции. Функция единичного скачка

Рассмотрим первообразную от гауссовского импульса

$$\int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{\tau^2}{2a^2}} d\tau =$$

$$= \Phi(a, t) = \Phi_u\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right)\right). \quad (1.14)$$

Здесь использованы стандартные обозначения:  $\Phi(a, t)$  — функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами

$(0, a)$ ;  $\Phi_u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$  — функция распределения стан-

дартной гауссовской случайной величины;  $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\xi^2} d\xi =$

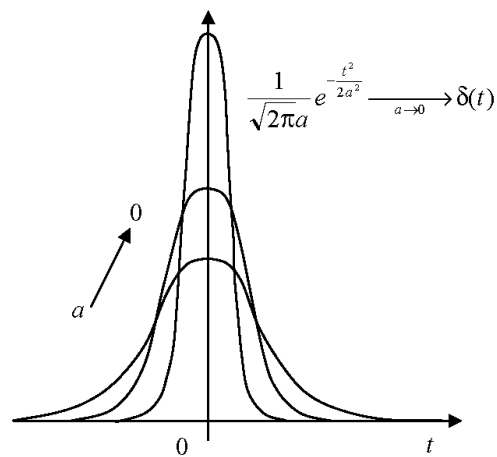
$= 2\Phi_u(t\sqrt{2}) - 1$  — функция ошибок (error function).

Совершая предельный переход в (1.14) при  $a \rightarrow 0$ , получаем функцию единичного скачка

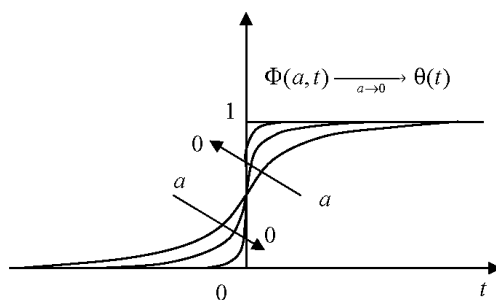
$$\theta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \Phi_u\left(\frac{t}{a}\right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right)\right). \quad (1.15)$$

С одной стороны, совокупность соотношений (1.9), (1.9') (1.14) и (1.15) позволяет заключить, что  $\theta(t)$  — первообразная от  $\delta(t)$ , откуда получаем  $\delta'(t) = \theta(t)$ . С другой стороны, поточечный предел при  $a \rightarrow 0$  (рис. 1.9 и 1.10) дает

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.16)$$



**Рис. 1.9**



**Рис. 1.10**

Равенство (1.16) определяет так называемую симметричную функцию единичного скачка, равную в нуле  $1/2$ , в отличие от асимметричных, принимающих значения  $1$  или  $0$ .

Функция  $\theta(t)$  была введена инженером-электриком О. Хевисайдом, который в начале XX в. в значительной мере способствовал популяризации операционного (символического, как тогда называли) исчисления, успешно используя его в электротехнических расчетах.

Функции  $\delta(t)$  и  $\theta(t)$  относятся к классу так называемых обобщенных функций, основы математической теории которых были заложены С.Л. Соболевым и Л. Шварцем. В настоящее время тео-

рия обобщенных функций имеет многочисленные применения и все больше востребована физиками, математиками и инженерами.

**Пример 1.4.** Найти преобразование Фурье от функции  $f(t) = \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}$ ,  $\omega_m > 0$ .

$$\text{Для вычисления интеграла } \hat{f}(\omega) = S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} e^{-i\omega t} dt$$

применяем формулу дифференцирования по параметру и интегральное представление  $\delta$ -функции (1.13). Вначале запишем:

$$\omega_m S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m t}{t} e^{-i\omega t} dt.$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_m} (\omega_m S(\omega)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega_m t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_m - \omega)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\omega_m - \omega)t} dt \right). \end{aligned}$$

В силу соотношений (1.13)

$$\frac{\partial}{\partial \omega_m} (\omega_m S(\omega)) = \pi \delta(\omega_m - \omega) + \pi \delta(\omega_m + \omega).$$

Отсюда, учитывая, что  $\theta'(t) = \delta(t)$ , восстанавливаем первообразную  $\omega_m S(\omega) = \pi \theta(\omega + \omega_m) - \pi \theta(\omega - \omega_m) + C(\omega)$ . Далее, устремляя  $\omega_m \rightarrow 0$ , заключаем, что  $C(\omega) \equiv 0$ . Окончательно получаем  $S(\omega) = \frac{\pi}{\omega_m} (\theta(\omega + \omega_m) - \theta(\omega - \omega_m))$ , т. е. график спектральной функции будет иметь вид прямоугольника.

## 1.6. Спектры периодических сигналов и $\theta$ -функции

Использование  $\delta$ -функций позволяет применять преобразование Фурье к некоторым функциям, не являющимся абсолютно интегрируемыми.

Рассмотрим гармонический сигнал  $f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Тогда с учетом формулы (1.12) для спектральной плотности этого сигнала получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) = S_{\text{гарм}}(\omega) &= A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{A_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)} \right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{A_0}{2} e^{i\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{A_0}{2} e^{-i\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{A_0}{2} \left( 2\pi e^{i\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi e^{-i\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0) \right) = \\ &= A_0 \pi \left( e^{i\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0) \right). \end{aligned}$$

Функция

$$S_{\text{гарм}}(\omega) = A_0 \pi \left( e^{i\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0) \right) \quad (1.17)$$

равна нулю для всех частот, кроме  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = -\omega_0$ , при которых она, согласно (1.8) и (1.8'), обращается в бесконечность. Физически формула (1.17) вполне объяснима, так как гармоническому колебанию с конечной амплитудой и, следовательно, конечной энергией соответствует бесконечно большая плотность на дискретных частотах.

В частности, при  $\omega_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $f(t) = A_0 = \text{const}$  получаем спектральную плотность *постоянного сигнала*:

$$S_{\text{пост}}(\omega) = A_0 2\pi \delta(\omega). \quad (1.18)$$

Наконец, если рассмотреть *периодический сигнал* в форме (1.1) и вычислить его спектральную плотность с помощью (1.13), получим

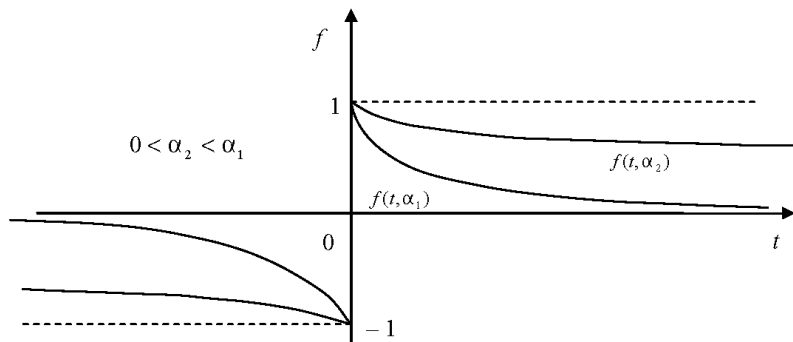


$$\begin{aligned}
S_{\text{пер}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0). \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Представление (1.19) оказывается полезным при рассмотрении смеси импульсного и периодического сигналов.

Получим теперь спектральную плотность  $\theta$ -функции. Для этого выделим вначале ее постоянную составляющую на всем бесконечном интервале, т. е. представим  $\theta(t)$  в виде

$$\theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t), \quad \text{где } \text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ +1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20)$$



**Рис. 1.11**

Далее введем в рассмотрение функцию (см. рис. 1.11)

$$f(t, \alpha) = \begin{cases} -e^{\alpha^2 t}, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ e^{-\alpha^2 t}, & t > 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

причем заметим, что  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(t, \alpha) = \text{sign}(t)$ .

С учетом соотношений (1.18), (1.20) и (1.21) имеем

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}(\omega) = S_{\theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt + \\
 &+ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{\alpha^2 t} e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} e^{-i\omega t} dt \right\} = \\
 &= \pi \delta(\omega) + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{e^{(\alpha^2 - i\omega)t}}{\alpha^2 - i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} \frac{e^{(-\alpha^2 - i\omega)t}}{-\alpha^2 - i\omega} \Big|_0^{+\infty} \right\} = \\
 &= \pi \delta(\omega) - \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 - i\omega} - \frac{1}{\alpha^2 + i\omega} \right\} = \\
 &= \pi \delta(\omega) - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{i\omega}{\alpha^4 + \omega^2} \right\} = \pi \delta(\omega) - \frac{i}{\omega} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}.
 \end{aligned}$$

В выражении для  $S_{\theta}(\omega)$  присутствует слагаемое  $\pi \delta(\omega)$ , соответствующее постоянной составляющей в  $\theta$ -функции.

Заметим, что постоянная составляющая будет отсутствовать лишь у функций, которые удовлетворяют условию  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ , причем интеграл здесь понимается в смысле главного значения.

## 1.7. Некоторые приложения преобразования Фурье

1. Использование преобразования Фурье позволяет решать широкий круг задач математической физики. К ним в первую очередь относятся краевые задачи для областей, имеющих формы полосы, полуполосы и т. п. Применение преобразования Фурье целесообразно в задачах, которые приводятся к интегрированию уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(u) = f(x, y),$$

где  $L(u)$  — линейный дифференциальный оператор, не содержащий переменной  $x$ ;  $f(x, y)$  — заданная функция.

В качестве примера рассмотрим одну задачу теплопроводности. Требуется найти распределение температуры  $u(x, t)$  в бесконечном стержне постоянного поперечного сечения с теплоизолированной боковой поверхностью, если задано распределение температуры в начальный момент времени

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.22)$$

В указанном случае уравнение теплопроводности записывается в следующем виде [6, 7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.23)$$

где  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$  — коэффициент температуропроводности ( $k$  — коэффициент теплопроводности;  $c$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — плотность материала стержня).

Обозначим через  $\hat{u}(\omega, t)$  — преобразование Фурье функции  $u(x, t)$  по переменной  $x$  и применим к уравнению (1.23) преобразование Фурье. Из физических соображений естественно предположить, что  $u \rightarrow 0$  и  $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Тогда, согласно свойствам преобразования Фурье, получим

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = -\omega^2 a^2 \hat{u}(\omega, t).$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции  $\hat{u}(\omega, t)$ , общее решение которого имеет вид  $\hat{u}(\omega, t) = A(\omega)e^{-\omega^2 a^2 t}$ . Функция  $A(\omega) = \hat{u}(\omega, 0)$  является преобразованием Фурье начального условия (1.22), отсюда

$$A(\omega) = \hat{u}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (1.24)$$

Следовательно,  $\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(\omega)e^{-\omega^2 a^2 t}$ , но тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(x) e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega x} d\omega.$$

Подставив в это выражение (1.24) и переменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right) e^{-\omega^2 a^2 t + i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) d\xi \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 a^2 t + i\omega(x-\xi)} d\omega \right). \end{aligned}$$

Внутренний интеграл здесь вычисляется аналогично выкладке (1.7) в примере 1.2. Окончательно получаем для  $u(x, t)$  выражение, называемое формулой Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

## 2. Решение интегральных уравнений.

Рассмотрим, например, интегральное уравнение с разностным ядром вида

$$a\varphi(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (1.25)$$

где  $K(t)$  и  $f(t)$  — данные функции;  $a$  — постоянная;  $\varphi(t)$  — неизвестная функция.

Применим к обеим частям уравнения преобразование Фурье. Допустив, что теорема о свертке применима (см. разд. 1.2), получим

$$a\hat{\varphi}(\omega) - \hat{K}(\omega)\hat{\varphi}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Если функция  $\{a - \hat{K}(\omega)\}^{-1}$  ограничена, то можно найти  $\hat{\varphi}(\omega)$ :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{a - \hat{K}(\omega)}.$$

Осталось применить обратное преобразование Фурье, откуда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)}{a - \hat{K}(\omega)} d\omega.$$

В частности, при  $a = 0$  уравнение (1.25) перейдет в так называемое интегральное уравнение первого рода типа свертки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi(t), \quad (1.26)$$

формальное решение которого имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} \hat{\psi}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} d\omega.$$

Использование термина «формальное решение» обусловлено тем обстоятельством, что на практике правая часть уравнения (1.26) часто известна лишь приближенно (результат измерений). И хотя по свойству преобразования Фурье функции  $\hat{K}(\omega)$  и  $\hat{\psi}(\omega)$  стремятся к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ , это стремление «несогласованное», так как «ошибка» функции  $\psi(t)$ , а следовательно, и  $\hat{\psi}(\omega)$ , носит случайный характер. Поэтому отношение  $\frac{\hat{\psi}(\omega)}{\hat{K}(\omega)}$  может не иметь обратного преобразования Фурье из-за влияния высоких частот  $\omega$  случайной функции «ошибки» — это отношение не будет абсолютно интегрируемой функцией. В указанном случае задача решения уравнения (1.26) относится к так называемым некорректным задачам, для решения которых используют метод регуляризации [8].

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

### 2.1. Переход от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа

Для использования преобразования Фурье существуют серьезные ограничения, связанные с требованием абсолютной интегрируемости функций, подвергающихся прямому и обратному преобразованиям.

Представим функцию  $f(t)$ , определенную на интервале  $(-\infty; +\infty)$ , в виде суммы двух функций  $f(t) = f_+(t) + f_-(t)$ , где  $f_+(t) = f(t)\theta(t)$ , а  $f_-(t) = f(t)\theta(-t)$ .

Домножим  $f_+(t)$  на  $e^{-\sigma_1 t}$ , причем  $\sigma_1 > 0$  выберем таким образом, чтобы обеспечить абсолютную интегрируемость  $f_+(t)e^{-\sigma_1 t}$  на интервале  $[0, +\infty)$ . Тогда к  $f_+(t)e^{-\sigma_1 t}$  можно применить преобразование Фурье, и полученное изображение  $S_+(\omega)$  будет связано с оригиналом формулой обратного преобразования Фурье:

$$f_+(t)e^{-\sigma_1 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Переходя к комплексной переменной  $p = \sigma_1 + i\omega$ , получаем

$$f_+(t)e^{-\sigma_1 t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} S_+ \left( \frac{p - \sigma_1}{i} \right) e^{(p - \sigma_1)t} dp.$$

Далее делим обе части на  $e^{-\sigma_1 t}$  и приходим к выражению

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} S_+ \left( \frac{p - \sigma_1}{i} \right) e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_{f_+}(p) e^{pt} dp, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где введено обозначение  $L_{f_+}(p) \equiv S_+ \left( \frac{p - \sigma_1}{i} \right) = S_+(\omega) =$   
 $= \int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 \tau} f_+(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$ . Отсюда получаем *одностороннее пре-*  
*образование Лапласа* функции  $f_+(t)$ :

$$L_{f_+}(p) = \int_0^{\infty} f_+(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (2.2)$$

При этом соотношение (2.1) естественно считать обратным преобразованием Лапласа.

Поступим аналогично с функцией  $f_-(t)$ , т. е. домножим ее на  $e^{-\sigma_2 t}$ , причем  $\sigma_2 < 0$  выберем таким образом, чтобы обеспечить абсолютную интегрируемость  $f_-(t)e^{-\sigma_2 t}$  на  $(-\infty, 0]$ . Тогда аналогично получим

$$L_{f_-}(p) = \int_{-\infty}^0 e^{-\sigma_2 \tau} f_-(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 f_-(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (2.3)$$

$$f_-(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} L_{f_-}(p) e^{pt} dp. \quad (2.4)$$

Объединив выражения (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4), запишем

$$L_f(p) = L_{f_+}(p) + L_{f_-}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (2.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_{f_+}(p) e^{pt} dp + \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} L_{f_-}(p) e^{pt} dp \right]. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.5) называют *двусторонним преобразованием Лапласа*, а соотношение (2.6) — соответствующим *обратным двусторонним преобразованием Лапласа*. Это преобразование целесообразно использовать при решении таких задач, в которых функция  $f(t)$  задана на всей оси.

## 2.2. Одностороннее преобразование Лапласа

Дальнейшее изложение будет посвящено одностороннему преобразованию, которое широко применяется при анализе переходных процессов, связанных с действием на динамическую систему внешней силы, когда начало отсчета времени совмещают с началом воздействия. Перейдем к строгим определениям.

**Определение 2.1.** *Функцией-оригиналом* называют любую комплексную функцию  $f(t)$  действительного переменного  $t$ , удовлетворяющую следующим условиям.

1. Функция  $f(t)$  непрерывна вместе со своими производными на всей действительной оси, кроме отдельных точек, в которых  $f(t)$  или ее производные терпят разрывы первого рода, причем на каждом конечном интервале имеется лишь конечное число таких точек.

2. Функция  $f(t) = 0$  для всех отрицательных значений  $t$ , т. е.  $f(t) = f_+(t) = \theta(t)f(t)$ . Принято все оригиналы записывать без множителя  $\theta(t)$ , но всегда помнить о его существовании.

3. Функция  $f(t)$  возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные  $M > 0$ ,  $\sigma_0 \geq 0$ , что для всех  $t$   $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ . При этом  $\sigma_0$  называют показателем роста  $f(t)$ , а для ограниченных оригиналов принимают  $\sigma_0 = 0$ .

**Определение 2.2.** *Изображением* по Лапласу оригинала  $f(t)$  называют функцию комплексного переменного  $p = \sigma + i\omega$ , определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (2.7)$$

где интеграл берется по положительной полуоси.

Соответствие между оригиналом и изображением обозначают так:

$$f(t) \doteq F(p) \text{ или } F(p) \doteq f(t).$$

Связь между оригиналами и изображениями устанавливают следующие теоремы, доказательство которых можно найти в [1, 9].



**Теорема 2.1.** Для всякого оригинала  $f(t)$  изображение  $F(p)$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — показатель роста оригинала, и является в этой полуплоскости аналитической функцией. При этом если точка  $p$  стремится к бесконечности так, что  $\operatorname{Re} p = \sigma$  неограниченно возрастает, то  $F(p)$  стремится к нулю:  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} F(p) = 0$ .

**Теорема 2.2.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом, т. е. удовлетворяет условиям 1—3, и  $F(p)$  — ее изображение, то в точках непрерывности

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (2.8)$$

где интеграл берется вдоль прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma_1 > \sigma_0$  и понимается в смысле главного значения.

**Теорема 2.3.** Если функция комплексного переменного  $F(p)$  определена и аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , существует предел  $\lim_{p \rightarrow 0} F(p) = 0$  и  $F(p)$  абсолютно интегрируема вдоль прямых  $\operatorname{Re} p = \sigma_1 > \sigma_0$ , то она является изображением для некоторой функции-оригинала  $f(t)$ , причем имеет место формула (2.8).

Найдем изображения для некоторых функций.

**Пример 2.1.** Смещенная функция Хевисайда  $\theta(t - t_0)$ , очевидно, является оригиналом при  $t_0 \geq 0$  с показателем роста  $\sigma_0 = 0$ . Следовательно, согласно теореме 2.1, в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  определено ее изображение ( $t_0$  играет роль параметра)

$$\Theta(p, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_{t_0}^{\infty} = \frac{1}{p} e^{-pt_0}. \quad (2.9)$$

Значит,  $\theta(t - t_0) \doteq \frac{1}{p} e^{-pt_0}$  и, в частности,  $\theta(t) \doteq \frac{1}{p}$ .

**Пример 2.2.** Показательная функция  $f(t) = e^{p_0 t}$  также является оригиналом. Ее изображение  $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{p_0 t} e^{-pt} dt = \frac{e^{(p_0 - p)t}}{p_0 - p} \Big|_0^{+\infty} =$

$= \frac{1}{p - p_0}$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ . Таким образом,

$$e^{p_0 t} \doteq \frac{1}{p - p_0}. \quad (2.10)$$

В частности, при  $p_0 = 0$  получаем  $1 \doteq \frac{1}{p}$ .

**Пример 2.3.** Преобразование Лапласа от смещенной  $\delta$ -функции Дирака  $\delta(t - t_0)$  можно найти (см. разд. 1.4) как предел изображения прямоугольного импульса

$$f_{\tau_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_n}, & t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_n, \\ 0, & t \notin [t_0, t_0 + \tau_n]. \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \Delta(p, t_0) &= \lim_{\tau_n \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \tau_n} \frac{1}{\tau_n} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \lim_{\tau_n \rightarrow 0} \frac{e^{-pt_0} - e^{-p(t_0 + \tau_n)}}{\tau_n} = \\ &= \frac{e^{-pt_0}}{p} \lim_{\tau_n \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-p\tau_n}}{\tau_n} = e^{-pt_0}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\delta(t - t_0) \doteq e^{-pt_0}, \quad (2.11)$$

откуда в частном случае  $t_0 = 0$  получаем  $\delta(t) \doteq 1$ .

Заметим, что для этой пары «оригинал — изображение» теорема 2.1 неверна, поскольку дельта-функция не является оригиналом в смысле данного выше определения 1—3. Более корректные объяснения для этого примера содержатся в [5].

## 2.3. Основные свойства преобразования Лапласа

**1. Линейность.** Пусть  $f(t) \doteq F(p)$  и  $g(t) \doteq G(p)$ , тогда для любых, в том числе комплексных постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$ .

**Пример 2.4.** Найдем изображение от  $f(t) = \cos \lambda t$ .

По формуле Эйлера  $\cos \lambda t = \frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2}$ , а согласно свойству линейности

$$\cos \lambda t = \frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p + i\lambda} + \frac{1}{p - i\lambda} \right) = \frac{p}{p^2 + \lambda^2}.$$

Аналогично можно найти, что

$$\sin \lambda t \doteq \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}, \quad \text{sh } \lambda t \doteq \frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}, \quad \text{ch } \lambda t \doteq \frac{p}{p^2 - \lambda^2}.$$

**Теорема подобия.** Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ , тогда для любого  $\alpha > 0$   $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ . Это соотношение легко доказывается заменой переменных. В частности,  $\sin \alpha(\lambda t) \doteq \frac{1}{\alpha} \frac{\lambda}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + \lambda^2} = \frac{\alpha \lambda}{p^2 + (\alpha \lambda)^2}$ .

**3. Теорема запаздывания.** Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ , тогда запаздыванию оригинала соответствует умножение изображения на  $e^{-p\tau}$ , т.е.  $\theta(t - \tau)f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}F(p)$  (см. рис. 2.1). В самом деле,  $\theta(t - \tau)f(t - \tau) \doteq \int_{\tau}^{+\infty} f(t - \tau)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-p(x+\tau)} dx = e^{-p\tau}F(p)$ .

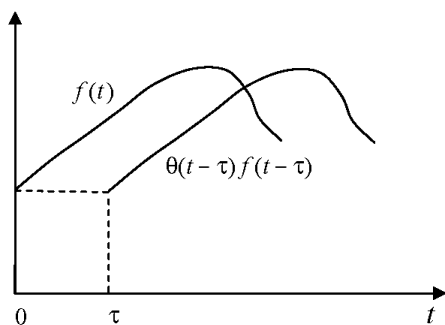
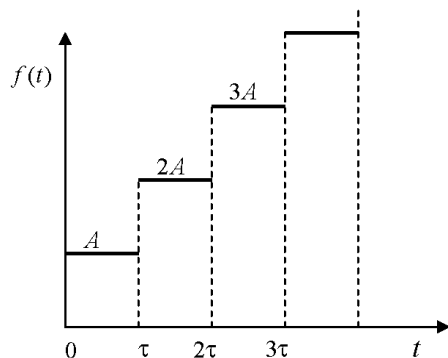


Рис. 2.1

**Пример 2.5** Найдем изображение бесконечной ступенчатой функции, изображенной на рис. 2.2.



**Рис. 2.2**

Представим функцию-оригинал в виде бесконечной суммы  $f(t) = A(\theta(t) + \theta(t - \tau) + \theta(t - 2\tau) + \dots)$ . Тогда с учетом равенства (2.7) и формулы для суммы геометрической прогрессии ( $|e^{-p\tau}| < 1$ ) получим:

$$\begin{aligned} f(t) &= A \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots \right) = \\ &= \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{A}{2p} \left( 1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right). \end{aligned}$$

**Пример 2.6.** Найдем изображение прямоугольного периодического импульса  $g(t)$  (см. рис. 2.3). Для этого заметим, что эту функцию можно представить в виде линейной комбинации тета-функций:

$$g(t) = B [(\theta(t) - \theta(t - \tau)) + (\theta(t - 2\tau) - \theta(t - 3\tau)) + \dots].$$

Отсюда, аналогично предыдущему примеру, получаем:

$$\begin{aligned} g(t) &= B \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} - \dots \right) = \\ &= \frac{B}{p} \frac{1}{1 + e^{-p\tau}} = \frac{B}{2p} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{p\tau}{2} \right). \end{aligned}$$

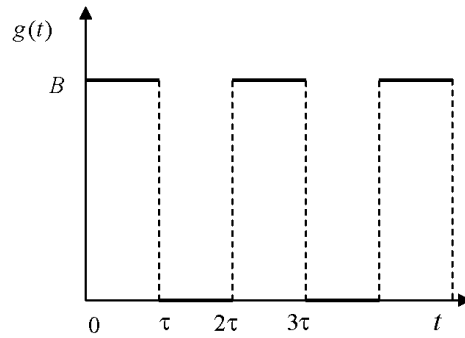


Рис. 2.3

Для любой периодической функции с периодом  $T$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\theta(t - nT) - \theta(t - (n+1)T)] f(t - nT),$$

что после аналогичных преобразований позволяет установить следующее свойство.

**4. Изображение периодической функции.** Пусть функция-оригинал периодична с периодом  $T$  на положительной полуоси, т. е.  $f(t + nT) = f(t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Тогда

$$f(t) \doteq \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

**5. Теорема смещения.** Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ , тогда для любого комплексного  $p_0$

$$f(t) e^{tp_0} \doteq F(p - p_0),$$

т. е. смещение изображения на  $p_0$  равносильно умножению оригинала на  $e^{tp_0}$ .

$$\text{Действительно, } e^{p_0 t} f(t) \doteq \int_0^T f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p - p_0).$$

**Пример 2.7.** Используя теорему смещения, сразу получаем:

$$e^{-\alpha t} \sin \lambda t \doteq \frac{\lambda}{(p + \alpha)^2 + \lambda^2}; \quad e^{-\alpha t} \cos \lambda t \doteq \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \lambda^2}.$$

**6. Дифференцирование оригинала.** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , а  $f'(t)$ ,  $f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  являются оригиналами, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\doteq p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\dots, \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - \\ &\quad - p^{n-2}f'(0) - \dots - p^0 f^{(n-1)}(0), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где под  $f^{(k)}(t)$  понимается предельное значение  $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Действительно, интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq \int_0^T f'(t)e^{-pt} dt = \\ &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

При подстановке верхнего предела в произведение  $f(t)e^{-pt}$  получается нуль, поскольку  $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}$ , а  $\operatorname{Re} p = \sigma_1 > \sigma_0$ . Применив операцию интегрирования по частям  $n$  раз, придем к соотношению (2.12).

**Пример 2.8.** Найдем изображение периодического треугольного импульса  $h(t)$  (рис. 2.4).

Дифференцирование треугольного импульса приводит к прямоугольному периодическому импульсу  $g_1(t) = h'(t)$ , который на рисунке показан толстым пунктиром. Обозначив  $B = \frac{2A}{\tau}$ , замечаем,

что  $g_1(t) = g(t) - \frac{B}{2}\theta(t)$ , где функция  $g(t)$  взята из примера 2.6.

Тогда, согласно свойству линейности, получаем:  $h'(t) = g_1(t) \doteq \frac{B}{2p} \left(1 + \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}\right) - \frac{B}{2p} = \frac{B}{2p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$ . Напротив, по свойству диффе-

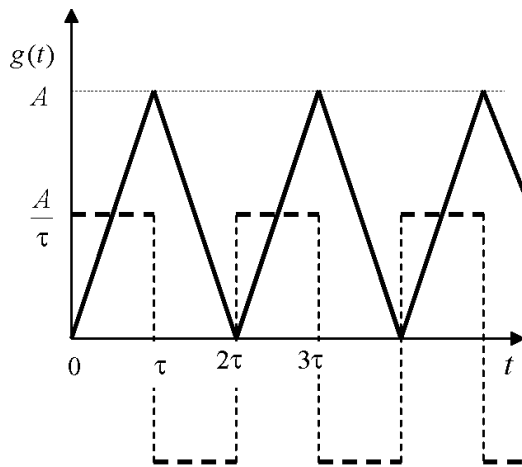


Рис. 2.4

ренцирования оригинала  $h'(t) \doteq pH(p) - h(0) = pH(p)$ . Отсюда

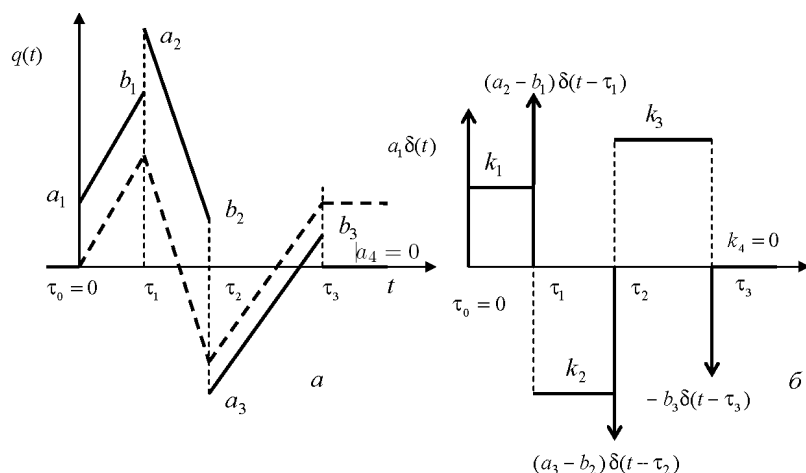
$$h(t) \doteq H(p) = \frac{B}{2p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2} = \frac{A}{\tau p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

**7. Интегрирование оригинала.** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  также является оригиналом, и

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

Первое утверждение легко следует из неравенства для интегралов:  $\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{\sigma_0 \tau} d\tau = \frac{M}{\sigma_0} (e^{\sigma_0 t} - 1) \leq M_1 e^{\sigma_0 t}$ , т. е.  $q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  является оригиналом. Далее, поскольку  $q(0) = 0$ , согласно свойству (2.12), из  $q(t) \doteq Q(p)$  следует, что  $f(t) = q'(t) \doteq pQ(p)$ . Тогда  $F(p) = pQ(p)$ , или  $\frac{F(p)}{p} = Q(p)$ .

**Пример 2.9.** Найдем изображение так называемой полигональной функции  $q(t)$  (рис. 2.5). Эта функция может быть представлена как сумма «сомкнутой» функции  $q_1(t)$ , показанной на рис. 2.5, *а* пунктиром, и нескольких  $\theta$ -функций, умноженных на величину скачка в точках разрыва:  $q(t) = q_1(t) + \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - b_i)\theta(t - \tau_i)$ , причем  $\tau_0 = 0, b_0 = 0, a_{n+1} = 0$ .



**Рис. 2.5**

Тогда ее производная (рис. 2.5, *б*) представима в виде

$$\begin{aligned} q'(t) &= q'_1(t) + \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - b_i) \delta(t - \tau_i) = \\ &= \sum_{i=0}^n \{ (k_{i+1} - k_i) \theta(t - \tau_i) + (a_{i+1} - b_i) \delta(t - \tau_i) \}, \end{aligned}$$

где  $k_i = \frac{b_i - a_i}{\tau_i - \tau_{i-1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , причем  $a_0 = b_0, k_0 = k_{n+1} = 0$ . Следовательно,

$$q'(t) \doteq \sum_{i=0}^n \left[ (k_{i+1} - k_i) \frac{e^{-p\tau_i}}{p} + (a_{i+1} - b_i) e^{-p\tau_i} \right],$$



а значит,

$$q(t) \doteq \sum_{i=0}^n \frac{e^{-p\tau_i}}{p} \left[ \frac{k_{i+1} - k_i}{p} + (a_{i+1} - b_i) \right]. \quad (2.12')$$

Таким образом, изображение полигональной функции  $q(t)$  определяется скачками производной  $(k_{i+1} - k_i)$  и скачками функции  $(a_{i+1} - b_i)$  в точках разрыва  $\tau = \tau_i$ .

В частности, если функция  $q(t)$  непрерывна, то  $(a_{i+1} - b_i) = 0$  и формула (2.12') упрощается

$$q(t) \doteq \sum_{i=0}^n (k_{i+1} - k_i) \frac{e^{-p\tau_i}}{p^2}. \quad (2.12'')$$

**8. Дифференцирование изображения.** Пусть  $F(p) \doteq f(t)$ , тогда

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t). \quad (2.13)$$

Действительно, поскольку  $F(p)$  является аналитической функцией в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , то, дифференцируя (2.7)  $n$  раз под знаком интеграла, получаем в итоге соотношение (2.13):

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt;$$

$$F''(p) = - \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt \quad \text{и т. д.}$$

**Пример 2.10.** Продифференцируем  $n$  раз изображение  $\theta$ -функции:  $\frac{1}{p} \doteq \theta(t)$ . Согласно (2.13),

$$\left( \frac{1}{p} \right)^{(n)} \doteq (-1)^n t^n \theta(t), \quad (2.14)$$

и в то же время  $\left( \frac{1}{p} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}$ . Следовательно,  $\frac{n!}{p^{n+1}} \doteq t^n \theta(t)$ .

Иногда  $\theta$ -функцию опускают и пишут  $\frac{n!}{p^{n+1}} \doteq t^n$ , принимая во

внимание, что все оригиналы по определению равны нулю на отрицательной полуоси.

**Пример 2.11.** Аналогично дифференцируя  $n$  раз изображение  $e^{-p_0 t}$  (см. соотношение (2.10)), найдем изображение  $t^n e^{-p_0 t}$ :

$$\frac{1}{p - p_0} \doteq e^{p_0 t}, \frac{-1}{(p - p_0)^2} \doteq -t e^{p_0 t}, \dots, \frac{(-1)^n n!}{(p - p_0)^{n+1}} \doteq (-t)^n e^{p_0 t}.$$

Отсюда следует, что

$$t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}.$$

**Пример 2.12 (для самостоятельного решения).** Показать, что  $t \sin \lambda t \doteq \frac{2\lambda p}{(p^2 + \lambda^2)^2}$ ,  $t \cos \lambda t \doteq \frac{p^2 - \lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2}$ .

**9. Интегрирование изображения.** Пусть  $F(p) \doteq f(t)$ , а  $\frac{f(t)}{t}$  ограничена в окрестности нуля, тогда

$$\int_p^{+\infty} F(q) dq \doteq \frac{f(t)}{t}. \quad (2.15)$$

В самом деле, перемена порядка интегрирования дает

$$\begin{aligned} \int_p^{+\infty} F(p) dp &= \int_p^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt dp = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \left( \int_p^{+\infty} e^{-pt} dp \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \doteq \frac{f(t)}{t}. \end{aligned}$$

**Пример 2.13.** Найдем изображение функции  $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$ . Поскольку  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$ , то по доказанному свойству  $\frac{\sin t}{t} \doteq$

$$\doteq \int_p^{+\infty} \frac{1}{q^2 + 1} dq = \operatorname{arctg} q \Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

**Пример 2.14.** Найдем изображение  $f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$ .

Каждая из функций  $\frac{e^{bt}}{t}$  и  $\frac{e^{at}}{t}$  по отдельности не является оригиналом, так как имеет в нуле разрыв второго рода. Но их разность оригиналом является, и поскольку  $e^{bt} \doteq \frac{1}{p-b}$ , а  $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$ , то, согласно (2.15),

$$f(t) \doteq \int_p^{+\infty} \left( \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a} \right) dp = \ln \frac{p-a}{p-b}.$$

### 10. Дифференцирование и интегрирование по параметру.

Пусть  $f(t, \alpha) \doteq F(p, \alpha)$  и функции  $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$  и  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha$  явля-

ются оригиналами, то  $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \doteq \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha}$  и  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha \doteq$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(p, \alpha) d\alpha.$$

**Пример 2.15.** Найдем изображение функции  $f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$  другим способом.

Поскольку  $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}$ , то по свойству 10 для  $f(t)$  получаем то же изображение

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at}) &= \int_a^b e^{\alpha t} d\alpha \doteq \int_a^b \frac{1}{p-\alpha} d\alpha = \\ &= -\ln(p-\alpha) \Big|_a^b = \ln \frac{p-a}{p-b}. \end{aligned}$$

**11. Теорема умножения.** Если функции  $f(t)$  и  $g(t)$  являются оригиналами,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $g(t) \doteq G(p)$ , то их свертка  $f * g$  также

является оригиналом и

$$(f * g)(t) \doteq F(p)G(p). \quad (2.16)$$

Поскольку подразумевается, что  $f(t) = f(t)\theta(t)$  и  $g(t) = g(t)\theta(t)$ , то свертка этих функций при положительных значениях переменной  $t$  совпадает с интегралом

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)\theta(t - \tau)g(\tau)\theta(\tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

При отрицательных значениях переменной  $t$  свертка из тех же соображений равна нулю.

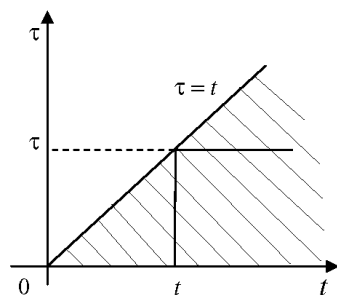


Рис. 2.6

Следовательно, формула (2.16) может быть переписана и таким образом:

$$\int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \doteq F(p)G(p). \quad (2.17)$$

Формулу (2.17) легко проверить заменой порядка интегрирования. В самом деле, меняя порядок интегрирования (см. область интегрирования

на рис. 2.6) и проводя замену  $y = t - \tau$ , получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau &\doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(t - \tau)dt = \int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(y+\tau)} f(y)dy = \\ &= \int_0^{+\infty} g(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int_0^{+\infty} e^{-py} f(y)dy = G(p)F(p). \end{aligned}$$

**Пример 2.16.** Восстановим с помощью теоремы умножения оригинал для функции  $R(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$ .

Будем считать, что  $R(p) = F(p)G(p)$ , где  $F(p) = \frac{1}{p-a}$ ,  
 $G(p) = \frac{1}{p-b}$ .

Тогда  $f(t) = e^{at}$ ,  $g(t) = e^{bt}$ , откуда

$$R(p) \doteq r(t) = \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = e^{bt} \left. \frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b} \right|_0^t = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

Если дополнительно использовать правила дифференцирования и интегрирования оригинала, то также легко найти:

$$\frac{p}{(p-a)(p-b)} \doteq r'(t) = \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b},$$

поскольку  $r(0) = 0$ ,

$$\frac{1}{p(p-a)(p-b)} \doteq \int_0^t r(\tau) d\tau = \frac{e^{at} - 1}{a(a-b)} - \frac{e^{bt} - 1}{b(a-b)}.$$

**12. Интеграл Дюамеля.** Если  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $g(t) \doteq G(p)$ , то в предположении, что  $f'(t)$  и  $g'(t)$  оригиналы имеют место формулы (интегралы Дюамеля)

$$pF(p)G(p) \doteq f(+0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (2.18)$$

$$pF(p)G(p) \doteq g(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \quad (2.19)$$

В самом деле, из теорем о дифференцировании оригинала и (2.16) следует:

$$\begin{aligned}
pF(p)G(p) &\doteq (pF(p) - f(+0))G(p) + f(+0)G(p) \doteq \\
&\doteq (f' * g)(t) + f(+0)g(t) = f(+0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t - \tau)d\tau,
\end{aligned}$$

что доказывает (2.18). Переставив  $f(t)$  и  $g(t)$  местами и используя свойство симметрии свертки, получаем также и свойство (2.19).

**З а м е ч а н и е.** Для проверки вычислений полезны следующие предельные соотношения:

- 1)  $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ ;
- 2)  $f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ ;
- 3)  $f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$ , если существует конечный предел  $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ .

Доказательства этих предельных соотношений и других фактов, приводящихся без доказательства, можно найти в учебниках [1, 9].

## 2.4. Теоремы разложения

**Теорема 2.4 (первая теорема разложения).** Пусть аналитическая функция  $F(p)$  правильна в бесконечно удаленной точке и разложима в окрестности  $\infty$  в ряд Лорана  $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$ . Тогда она является изображением и ее оригиналом служит (умноженная на  $\theta(t)$ ) целая функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}. \quad (2.20)$$

**З а м е ч а н и е.** Формулу (2.20) можно получить из разложения  $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$  почленным переходом к оригиналам (см. также пример 7 из предыдущего параграфа).

**Пример 2.17.** Пусть  $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$ .

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы. Разложение в ряд Лорана получаем, используя стандартное разложение для экспоненты,  $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}$ .

Тогда, согласно (2.20), ее оригиналом служит  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$ .

**Теорема 2.5 (вторая теорема разложения).** Пусть функция  $F(p)$  не имеет других особенностей, кроме полюсов, правильна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$  и удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда  $F(p)$  является изображением, а оригиналом служит (умноженная на  $\theta(t)$ ) функция

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res} \{ F(p) e^{pt}, p = p_k \}, \quad (2.21)$$

где сумма берется по всем полюсам функции  $F(p)$ .

Формула (2.21), очевидно, связана с теоремой Коши из комплексного анализа, согласно которой интеграл по замкнутому контуру  $C^+$  при  $t > 0$  с точностью до множителя  $2\pi i$  равен сумме вычетов функции во всех особых точках, лежащих внутри контура.

При вычислении оригинала согласно (2.8) необходимо проинтегрировать  $F(p) e^{pt}$  вдоль прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma_1 > \sigma_0$  (см. рис. 2.7, а). Если все особенности функции  $F(p)$  (а значит, и функции  $F(p) e^{pt}$ ) лежат левее этой прямой, то, выбирая контур  $C^+ = l_R + C_R$ , изображенный на рис. 2.7, б, получаем:

$$\begin{aligned} F(p) \doteq f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{l_R} F(p) e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{C^+} F(p) e^{pt} dp - \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp \right]. \end{aligned}$$

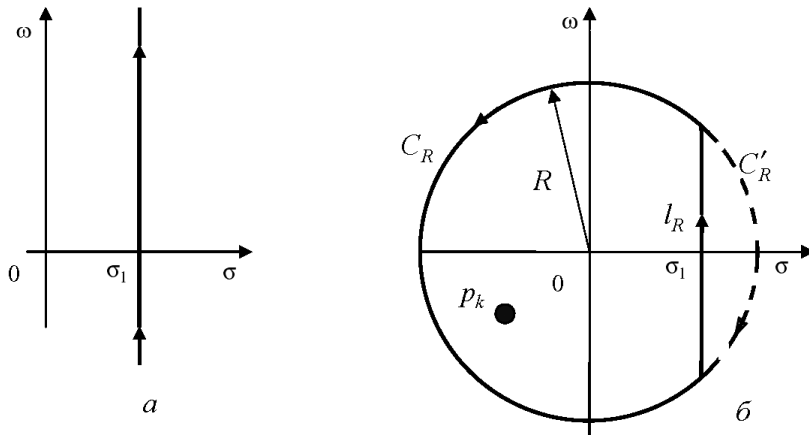


Рис. 2.7

Так как  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p)e^{pt} dt = 0$  по лемме Жордана, а  $\int_{C^+} F(p)e^{pt} \times dp = 2\pi i \sum_k \text{res} \{F(p)e^{pt}, p = p_k\}$  по теореме Коши, то  $f(t) = \sum_k \text{res} \{F(p)e^{pt}, p = p_k\}$ .

В тех же условиях, но при  $t < 0$ , нужно выбрать контур  $C^- = l_R + C'_R$  с противоположным направлением обхода. Внутри него нет особых точек и  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

**Следствие 1.** Пусть  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  — дробно-рациональная функция, причем степень многочлена  $A(p)$  меньше степени  $B(p)$ . Тогда оригиналом для  $F(p)$  служит (умноженная на  $\theta(t)$ ) функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{(p - p_k)^{n_k} F(p)e^{pt}\}, \quad (2.22)$$

где  $p_k$  — полюсы функции  $F(p)$ , а  $n_k$  — их кратности,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Формула (2.22), очевидно, вытекает из формулы (2.21), если в последнюю подставить выражения для вычисления вычета в полюсе  $p_k$  кратности  $n_k$ .



**Следствие 2.** Если  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  — дробно-рациональная функция, все полюса которой простые, то ее оригиналом является линейная комбинация экспонент:

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.23)$$

**З а м е ч а н и е.** На самом деле формула (2.23) годится и для функции  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ , имеющей только простые полюсы, где  $A(p)$  и  $B(p)$  — не обязательно многочлены.

**Пример 2.18.** Найдем этим способом оригинал от функции  $R(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$ , рассмотренной в примере 2.16.

Эта функция имеет два простых полюса в точках  $p_1 = a$  и  $p_2 = b$ . Из условия видим, что  $A(p) = A(p_k) \equiv 1$ , а  $B'(p) = [(p-a)(p-b)]' = 2p - a - b$ , откуда  $B'(p_1) = B'(a) = a - b$ ,  $B'(p_2) = B'(b) = b - a$ . Следовательно,

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} \doteq \frac{1}{a-b} e^{at} + \frac{1}{b-a} e^{bt} = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

**Пример 2.19.** Найдем оригинал для  $F(p) = \frac{1}{p^2(p-a)^2(p-b)}$ .

$F(p)$  имеет полюс второго порядка в точке  $p_1 = 0$ , полюс второго порядка в точке  $p_2 = a$  и полюс первого порядка в точке  $p_3 = b$ .

Находим слагаемые в формуле (2.22):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} \left\{ \frac{p^2 e^{pt}}{p^2 (p-a)^2 (p-b)} \right\} = \\ & = \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{pt} [(p-a)(p-b)t - (3p-2b-a)]}{(p-a)^3 (p-b)^2} \right\} = -\frac{abt + 2b + a}{a^3 b^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} \left\{ \frac{(p-a)^2 e^{pt}}{p^2 (p-a)^2 (p-b)} \right\} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow a} \left\{ \frac{e^{pt} [p(p-b)t - (3p-2b)]}{p^3 (p-b)^2} \right\} = \frac{e^{at} [a(a-b)t - 3a + 2b]}{a^3 (a-b)^2};$$

$$\frac{1}{(1-1)!} \lim_{p \rightarrow b} \frac{d^{1-1}}{dp^{1-1}} \left\{ \frac{(p-b) e^{pt}}{p^2 (p-a)^2 (p-b)} \right\} = \frac{e^{bt}}{b^2 (b-a)^2}.$$

Окончательно выписываем ответ:

$$F(p) = -\frac{abt + 2b + a}{a^3 b^2} + \frac{e^{at} [a(a-b)t - 3a + 2b]}{a^3 (a-b)^2} + \frac{e^{bt}}{b^2 (b-a)^2}.$$

### 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

#### 3.1. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$L[x] \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (3.2)$$

где  $L[x]$  — линейный дифференциальный оператор;  $a_i, i = 1, 2, \dots, n, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$  — заданные постоянные; а  $f(t)$  — функция, принадлежащая классу изображений.

Применим к обеим частям уравнения (3.1) преобразование Лапласа и перейдем таким образом к уравнению в изображениях. Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ , тогда, если  $x(t) \doteq X(p)$ , то с учетом начальных условий (3.2) и свойств преобразования Лапласа получаем

$$\begin{aligned}
x'(t) &\doteq pX(p) - x_0, \\
x''(t) &\doteq p^2X(p) - px_0 - x'_0, \\
&\dots\dots\dots, \\
x^{(n)}(t) &\doteq p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - \dots - px_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Подставим эти равенства в левую часть (3.1), выделив линейную комбинацию первых слагаемых, а все остальные объединив в многочлен  $Q(p)$  степени  $(n - 1)$ , коэффициенты которого зависят от  $a_i$  и от начальных условий (3.2):

$$(p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) - Q(p) = F(p).$$

Решая это уравнение относительно неизвестной функции-изображения  $X(p)$ , получим

$$X(p) = \frac{F(p) + Q(p)}{A(p)}, \text{ где } A(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Таким образом, остается лишь восстановить оригинал, пользуясь одним из известных методов.

В частности, если в задаче (3.1) начальные условия (3.2) нулевые, получим формулу

$$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}. \tag{3.3}$$

**Пример 3.1.** Найдем решение следующей задачи Коши:

$$x'' + x' - 2x = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

Сначала находим изображение правой части и производных:

$$e^{-t} \doteq \frac{1}{p+1}, \quad x'(t) \doteq pX(p) - 1, \quad x''(t) \doteq p^2X(p) - p + 2.$$

Далее подставляем в дифференциальное уравнение вместо каждого члена его изображение:

$$p^2X(p) - p + 2 + pX(p) - 1 - 2X(p) = \frac{1}{p+1},$$

преобразуем

$$(p^2 + p - 2) X(p) = \frac{1}{p+1} + p - 1 = \frac{p^2}{p+1},$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^2}{(p+1)(p-1)(p+2)} = \frac{4}{3} \frac{1}{p+2} + \frac{1}{6} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}.$$

Восстанавливаем оригинал, пользуясь формулой (2.10):

$$x(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} + \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}.$$

**З а м е ч а н и е.** При решении задачи Коши с нулевыми начальными условиями и произвольной правой частью иногда полезно решить сначала вспомогательную задачу.

1. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$L[z] \equiv z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = \delta(t) \quad (3.4)$$

с начальными условиями  $z(0) = 0, z'(0) = 0, \dots, z^{(n-1)}(0) = 0$ .

Согласно формуле (3.3) ее решением будет функция  $z(t) \doteq Z(p) = \frac{1}{A(p)}$ , поскольку  $F(p) = 1 \doteq \delta(t)$ . Тогда решение уравнения с произвольной правой частью можно представить как  $x(t) \doteq X(p) = \frac{F(p)}{A(p)} = F(p)Z(p)$ , откуда по теореме умножения получаем

$$x(t) = (f * z)(t) = \int_0^t f(\tau) z(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (3.4')$$

В уравнении (3.4) левая часть представляет собой линейную комбинацию функции  $z = z(t)$  и ее производных, а справа стоит  $\delta$ -функция, не являющаяся функцией в обычном понимании. Тем не менее рассмотренная задача имеет ясную физическую интерпретацию: находится отклик динамической системы на импульсное

воздействие, задаваемое функцией  $\delta(t)$ , в нулевой момент времени. Это так называемая импульсная характеристика системы.

2. Можно также рассмотреть задачу о нахождении переходной характеристики системы — ее отклик на единичное воздействие.

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \theta(t),$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тогда аналогично  $y(t) \doteq Y(p) = \frac{1}{pA(p)}$ , поскольку  $F(p) = \frac{1}{p} \doteq \theta(t)$ . Следовательно, в этом случае решение уравнения с произвольной правой частью  $x(t) \doteq X(p) = \frac{F(p)}{A(p)} = pY(p)F(p)$  представимо как оригинал от произведения  $pY(p)F(p)$ , т. е. вследствие справедливости интеграла Дюамеля

$$x(t) = f(+0)y(t) + \int_0^t f'(\tau)y(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t f(\tau)y'(t-\tau)d\tau. \quad (3.4'')$$

**Пример 3.2.** Проинтегрируем дифференциальное уравнение  $x'' + 4x = q(t)$ , если

$$q(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases} \quad \text{а } x(0) = x'(0) = 0,$$

*1-й способ.* Правая часть этого уравнения является непрерывной полигональной функцией, поэтому ее изображение можно найти по формуле (2.12''). Поскольку скачки производной, имеющие место в точках  $\tau_0 = 0, \tau_1 = \frac{\pi}{2}, \tau_2 = \pi$ , равны

$$k_1 - k_0 = q'(\tau_0 + 0) = q'(+0) = 1,$$

$$k_2 - k_1 = q'(\tau_1 + 0) - q'(\tau_1 - 0) = q'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - q'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -2,$$

$$k_3 - k_2 = q'(\tau_2 + 0) - q'(\tau_2 - 0) = q'(\pi + 0) - q'(\pi - 0) = 1,$$

формула (2.12'') дает:  $q(t) \doteq \frac{1}{p^2} \left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}\right)$ .

Далее, в силу нулевых начальных условий  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $x''(t) \doteq p^2 X(p)$ , получаем операторное уравнение

$$(p^2 + 4) X(p) = \frac{1}{p^2} \left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}\right),$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 4)} \left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}\right).$$

Наличие в правой части сомножителей  $e^{-\frac{\pi}{2}p}$  и  $e^{-\pi p}$  свидетельствует о необходимости использования теоремы запаздывания при восстановлении оригинала.

Восстановим сначала оригинал от слагаемого  $\frac{1}{p^2(p^2 + 4)}$ . Эта функция имеет три особые точки:  $p_1 = 0$  — полюс второго порядка,  $p_{2,3} = \pm 2i$  — полюсы первого порядка. Тогда по второй теореме разложения

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2(p^2 + 4)} \doteq & \operatorname{res} \left[ \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 + 4)}; 0 \right] + \operatorname{res} \left[ \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 + 4)}; 2i \right] + \\ & + \operatorname{res} \left[ \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 + 4)}; -2i \right]. \end{aligned}$$

Найдем эти вычеты по формуле (2.22):

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left[ \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 + 4)}; 0 \right] &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[ \frac{p^2 e^{pt}}{p^2(p^2 + 4)} \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{te^{pt}(p^2 + 4) - 2pe^{pt}}{(p^2 + 4)^2} = \frac{t}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left[ \frac{e^{pt}}{p^2(p^2+4)}; 2i \right] &= \lim_{p \rightarrow 2i} \left[ \frac{(p-2i)e^{pt}}{p^2(p-2i)(p+2i)} \right] = \\ &= \frac{e^{2it}}{(-4)4i} = \frac{ie^{2it}}{16}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left[ \frac{e^{pt}}{p^2(p^2+4)}; -2i \right] &= \lim_{p \rightarrow -2i} \left[ \frac{(p+2i)e^{pt}}{p^2(p-2i)(p+2i)} \right] = \\ &= \frac{e^{-2it}}{(-4)(-4i)} = -\frac{ie^{-2it}}{16}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{1}{p^2(p^2+4)} \doteq \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t$ . С учетом теоремы запаздывания

$$\begin{aligned} x(t) &= \left( \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t \right) \theta(t) - 2 \left( \frac{1}{4} \left( t - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{8} \sin 2 \left( t - \frac{\pi}{2} \right) \right) \times \\ &\quad \times \theta \left( t - \frac{\pi}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} (t - \pi) - \frac{1}{8} \sin 2(t - \pi) \right) \theta(t - \pi), \end{aligned}$$

или

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} \sin 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8} \sin 2t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, \\ -\frac{1}{2} \sin 2t, & t \geq \pi. \end{cases} \quad (3.5)$$

2-й способ. Решим вспомогательную задачу  $L[y] = \theta(t)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ . Соответствующие операторные уравнения будут иметь вид  $(p^2+4)Y(p) = \frac{1}{p}$ . Следовательно,  $Y(p) = \frac{1}{p(p^2+4)}$ , откуда с использованием  $\frac{1}{2} \sin 2t \doteq \frac{1}{p^2+4}$  и свойства интегрирования оригинала получаем  $y(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \sin(2\tau) d\tau = \frac{1}{4} (1 - \cos 2t)$ . Далее применяем формулу (3.4'')

$$\begin{aligned}
x(t) &= q(+0)y(t) + \int_0^t y(t - \tau)q'(\tau)d\tau = \\
&= \int_0^t \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - \tau)) q'(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

поскольку  $q(0+) = 0$ . Находим

$$q'(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

Далее, рассматривая по отдельности случаи  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$  и  $t \geq \pi$ , снова получим для  $x(t)$  выражение (3.5).

### 3.2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Метод решения систем дифференциальных уравнений строится аналогично. Основное отличие будет заключаться в том, что вместо одного операторного уравнения придется решать систему таких уравнений. Проиллюстрируем решение системы операционным методом на примерах.

**Пример 3.3.** Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - y' = e^t, \\ y'' - y + x' = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

с начальными условиями  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ .

Обозначим  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $y(t) \doteq Y(p)$ , найдем  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ . Тогда по свойству дифференцирования оригинала с учетом начальных



условий можем заключить, что

$$\begin{aligned}x'(t) &\doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \\x''(t) &\doteq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p, \\y'(t) &\doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 1, \\y''(t) &\doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + p.\end{aligned}$$

Запишем систему (3.6) в изображениях:

$$\begin{cases} p^2X(p) - p - pY(p) - 1 = \frac{1}{p-1}, \\ p^2Y(p) + p - Y(p) + pX(p) - 1 = 0. \end{cases}$$

После упрощения получим:

$$\begin{cases} p^2X(p) - pY(p) = \frac{p^2}{p-1}, \\ pX(p) + (p^2 - 1)Y(p) = -p + 1. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных относительно  $X(p)$  и  $Y(p)$  уравнений по правилу Крамера ( $\Delta = p^4$ ,  $\Delta_X = p^3 + p$ ,  $\Delta_Y = p^2 - \frac{p^4}{p-1}$ ), находим

$$\begin{aligned}X(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} \doteq 1 + \frac{t^2}{2} = x(t), \\Y(p) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p-1} \doteq t - e^t = y(t).\end{aligned}$$

**Пример 3.4.** Решим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - x + y' = \cos t, \\ y'' + y + x' = \operatorname{ch} t + t \end{cases}$$

с начальными условиями  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

Обозначим  $x(t) \doteq X(p) = X$ ,  $y(t) \doteq Y(p) = Y$ , найдем изображения правых частей:  $\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$ ,  $\operatorname{ch} t + t \doteq \frac{p}{p^2 - 1} + \frac{1}{p^2}$ . Далее с учетом начальных условий имеем:

$$x'(t) \doteq pX - x(0) = pX - 1,$$

$$x''(t) \doteq p^2 X - px(0) - x'(0) = p^2 X - p - 1,$$

$$y'(t) \doteq pY - y(0) = pY,$$

$$y''(t) \doteq p^2 Y - py(0) - y'(0) = p^2 Y - 2.$$

Запишем систему в изображениях:

$$\begin{cases} p^2 X - p - 1 - X + pY = \frac{p}{p^2 + 1}, \\ p^2 Y - 2 + Y + pX - 1 = \frac{p}{p^2 - 1} + \frac{1}{p^2}, \end{cases}$$

затем упростим ее:

$$\begin{cases} (p^2 - 1) X + pY = p + 1 + \frac{p}{p^2 + 1}, \\ pX + (p^2 + 1) Y = 3 + \frac{p}{p^2 - 1} + \frac{1}{p^2}. \end{cases}$$

Находим:

$$\Delta = p^4 - p^2 - 1;$$

$$\Delta_X = p^3 + p^2 - 2p - \frac{1}{p^2 - 1} - \frac{1}{p} = \frac{p^6 + p^5 - 2p^4 - p^3 - p + 1}{p(p^2 - 1)};$$

$$\Delta_Y = 2p^2 - 3 + \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2} = \frac{2p^6 - p^4 - 3p^2 - 1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

В данном примере числители в  $\Delta_X$  и  $\Delta_Y$  делятся на  $\Delta$  нацело. Получаем

$$X = \frac{p^2 + p - 1}{p(p^2 - 1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 - 1} \doteq 1 + \text{sht},$$

$$Y = \frac{2p^2 + 1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 + 1} \doteq t + \sin t.$$

**З а м е ч а н и е.** Возможность сократить дробь в изображении позволила легко найти частное решение. Однако, как будет видно из следующего примера, при сокращении дробей следует соблюдать осторожность, поскольку при этом из решения могут выпасть неустойчивые слагаемые.

**Пример 3.5.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - y = 0, \\ x - y' = 0 \end{cases}$$

с начальными условиями  $x(0) = -1, y(0) = 1$ .

Для изображений получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} pX + 1 - Y = 0, \\ X - pY + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$X(p) = -\frac{p-1}{p^2-1} = -\frac{1}{p+1} \doteq -e^{-t} = x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

$$Y(p) = -p\frac{p-1}{p^2-1} + 1 = \frac{p-1}{p^2-1} = \frac{1}{p+1} \doteq e^{-t} = y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

На этой основе можно сделать ошибочное заключение, что динамическая система будет устойчива.

Однако если в задании начального условия имеется погрешность, т. е. если  $x(0) = -1 - \varepsilon, y(0) = 1$ , то решение будет принципиально другим.

В самом деле, в этом случае для изображений получается система

$$\begin{cases} pX + 1 + \varepsilon - Y = 0, \\ X - pY + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда  $Y = pX + 1 + \varepsilon, X - p^2X - (1 + \varepsilon)p + 1 = 0$ , т. е.

$$X(p) = -\frac{p-1+\varepsilon p}{p^2-1} = -\frac{1}{p+1} + \varepsilon\frac{p}{p^2-1} \doteq -e^{-t} + \varepsilon \operatorname{ch} t = \\ = x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty,$$

$$Y(p) = -\frac{(1+\varepsilon)p-1}{p^2-1}p + 1 + \varepsilon = \frac{1}{p+1} - \varepsilon\frac{1}{p^2-1} \doteq \\ \doteq e^{-t} - \varepsilon \operatorname{sh} t = y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty.$$

Таким образом, рассмотренная динамическая система не является устойчивой.

### 3.3. Решение задач математической физики

Рассмотрим задачу о распределении температур в ограниченном стержне  $-l < x < l$  с теплоизолированной боковой поверхностью. На концах стержня при  $t > 0$  поддерживается постоянная температура  $u_1$ , начальная температура  $u_0$  также постоянна.

Из физики известно, что температура стержня  $u = u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1.23)  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  с граничными условиями  $u(\pm l, t) = u_1, t > 0$ , и начальным условием  $u(x, 0) = u_0, -l < x < l$ . Преобразуем это уравнение по Лапласу по переменной  $t$ :

$$pU - u_0 = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

Тогда для функции-изображения  $U(x, p) \doteq u(x, t)$  получается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения (по переменной  $x$ )

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U = -\frac{u_0}{a^2}, \quad (3.7)$$

$$U(\pm l, p) = \frac{u_1}{p}. \quad (3.8)$$

Общее решение уравнения (3.7) записывается в виде суммы его частного решения (очевидно, на эту роль подходит константа  $U = \frac{u_0}{p}$ ) и произвольной линейной комбинации функций  $e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$  и  $e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$ , или с использованием гиперболических функций  $U(x, p) = \frac{u_0}{p} + C_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} x + C_2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} x$ . Подстановка краевых условий (3.8) дает

$$\frac{u_1}{p} = \frac{u_0}{p} + C_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} l + C_2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l;$$

$$\frac{u_1}{p} = \frac{u_0}{p} - C_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} l + C_2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l,$$

откуда  $C_1 = 0, C_2 = \frac{u_1 - u_0}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l}$ .

Таким образом, изображение решения имеет вид

$$U(x, p) = \frac{u_0 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l + (u_1 - u_0) C_2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} x}{p C_2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l} \equiv \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (3.9)$$

Для нахождения оригинала применим вторую теорему разложения. Функция, определяемая равенством (3.9), имеет простые полюсы в точке  $p_0 = 0$ , а также в точках  $p_k = -\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В самом деле, как известно из курса теории функций комплексного переменного,  $\operatorname{ch} z = \cos iz$ , откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l = 0 &\Leftrightarrow i \frac{l}{a} \sqrt{p} = -\frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{l^2}{a^2} p = \pi^2 \left(-\frac{1}{2} + k\right) p \Leftrightarrow p_k = -\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$A(p_0) = A(0) = u_1;$$

$$A(p_k) = (u_1 - u_0) \operatorname{ch} \frac{x}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right) i \pi = (u_1 - u_0) \cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l};$$

$$B'(p) = \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p} + p \frac{l}{2a\sqrt{p}} \operatorname{sh} \frac{l}{a} \sqrt{p};$$

$$B'(p_0) = B'(0) = 1;$$

$$\begin{aligned} B'(p_k) &= \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p_k} + \frac{l}{2a} \sqrt{p_k} \operatorname{sh} \frac{l}{a} \sqrt{p_k} = \frac{l}{2a} \frac{a\pi i}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right) \times \\ &\times \operatorname{sh} \left(\frac{l}{a} \frac{a\pi i}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \left(k - \frac{1}{2}\right) i \operatorname{sh} \left(\pi i \left(k - \frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(k - \frac{1}{2}\right) \sin \left(\pi \left(k - \frac{1}{2}\right)\right) = (-1)^k \frac{\pi}{2} \left(k - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Окончательно, по формуле (2.23) находим:

$$u(x, t) = u_1 + \frac{2(u_1 - u_0)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \frac{1}{2}} \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \times \\ \times \exp \left( -\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left( k - \frac{1}{2} \right)^2 t \right).$$

### 3.4. Решение интегральных уравнений

Методами операционного исчисления можно решать интегральные уравнения Вольтера первого и второго рода с разностным ядром.

Интегральное уравнение Вольтера первого рода с разностным ядром имеет вид

$$\int_0^t K(t - \tau)x(\tau)d\tau = \psi(t). \quad (3.10)$$

Интегральное уравнение Вольтера второго рода имеет вид

$$x(t) - \int_0^t K(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (3.11)$$

Здесь  $x(t)$  — неизвестная функция, а  $\psi(t), f(t)$  и  $K(t - \tau)$  — заданные функции, являющиеся оригиналами. Процедура решения уравнений (3.10) и (3.11) аналогична изложенной в разд. 1.7 для похожих уравнений (1.26) и (1.25). Воспроизведем ее на примере решения уравнения вида (3.11).

**Пример 3.6.** Рассмотрим уравнение  $x(t) - \int_0^t \sin 2(t - \tau)x(\tau) \times \\ \times d\tau = t \cos 2t.$

Согласно примерам 2.5 и 2.6,  $\sin 2t \doteq \frac{2}{p^2 + 4}$ ,  $t \cos 2t \doteq \doteq \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2}$ . Далее по теореме о свертке  $\int_0^t \sin 2(t - \tau)x(\tau)d\tau =$

$$\begin{aligned}
&= (\sin 2t * x(t)) \doteq \frac{2}{p^2 + 4} X(p). \text{ Тогда операторное уравнение при-} \\
&\text{мет вид } \left(1 - \frac{2}{p^2 + 4}\right) X(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2}, \text{ откуда } X(p) = \\
&= \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)(p^2 + 2)} = \frac{4}{p^2 + 4} - \frac{3}{p^2 + 2} = 2 \frac{2}{p^2 + 2^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{p^2 + (\sqrt{2})^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно,  $X(p) \doteq x(t) = 2 \sin 2t - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t$ .

**Варианты типового расчета**

**Задача 1.** Для заданного сигнала  $f = f(t)$  найти его спектральную плотность  $S(\omega) = \hat{f}(\omega)$  (преобразование Фурье данной функции  $f$ ). Задавшись значениями определяющих параметров, построить графики сигнала и его спектральной плотности. В случае комплексной  $S(\omega)$  построить графики АЧХ =  $|S(\omega)|$  и ФЧХ =  $-\arg S(\omega)$ . Проверить полученные результаты.

№ варианта	Функция (сигнал)
1	$f(t) = \theta(t - \alpha)$
2	$f(t) = \theta(t)e^{-\alpha t}, \alpha > 0$
3	$f(t) = e^{-\alpha t }, \alpha > 0$
4	$f(t) = \begin{cases} 1 -  t /2 & \text{при }  t  \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при }  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$
5	$f(t) = \frac{\sin \omega_m (t - \tau)}{\omega_m (t - \tau)}, \omega_m > 0$
6	$f(t) = e^{-\alpha t } \cos \omega_0 t, \alpha > 0$
7	$f(t) = (1 + \alpha t ) e^{-\alpha t }, \alpha > 0$
8	$f(t) = \left(1 + \alpha t  + \frac{\alpha^2 t^2}{3}\right) e^{-\alpha t }, \alpha > 0$
9	$f(t) = e^{-\alpha t } \left(\cos \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  t \right), \alpha > 0$



Продолжение таблицы

№ варианта	Функция (сигнал)
10	$f(t) = e^{-\alpha t^2} \cos \omega_0 t, \alpha > 0$
11	$f(t) = \frac{\pi}{\omega_m} \delta(t) - \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}, \omega_m > 0$
12	$f(t) = \delta(t) - \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{ t }{\beta}}, \beta > 0$
13	$f(t) = \cos(\alpha t^2), \alpha > 0$
14	$f(t) = \sin(\alpha t^2), \alpha > 0$
15	$f(t) = \frac{e^{-\alpha t }}{\sqrt{ t }}, \alpha > 0$
16	$f(t) = e^{-\alpha t }  t , a > 0$
17	$f(t) = \theta(t) e^{-\alpha t} \cdot \frac{t^2}{2}, \alpha > 0$
18	$f(t) = \theta(t) e^{-\alpha t} \cos \beta t, \alpha > 0$
19	$f(t) = \frac{\cos \omega_0 t}{\sqrt{ t }}$
20	$f(t) = e^{-\alpha t } \sin \omega_0 t, \alpha > 0$
21	$f(t) = \theta(t) e^{-\alpha t} \sin \beta t, \alpha > 0$
22	$f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\sqrt{ t }}$
23	$f(t) = \frac{a}{a^2 + t^2}, a > 0$
24	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{ t }}$
25	$f(t) = \theta(t - \beta) e^{-\alpha t}, \alpha > 0$

Окончание таблицы

№ варианта	Функция (сигнал)
26	$f(t) = \frac{e^{- t-\alpha }}{\sqrt{ t-\alpha }}$
27	$f(t) = \frac{t}{(a^2 + t^2)^2}, \quad a > 0$
28	$f(t) = \theta(t)e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0$
29	$f(t) = \frac{1}{t(a^2 + t^2)}, \quad a > 0$
30	$f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}, \quad a > 0$

**Задача 2.** Найти изображения данных функций, проверив предварительно, что они являются оригиналами.

№ варианта	Функция
1	$\frac{\operatorname{ch}3t - \operatorname{ch}2t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch}3\tau - \operatorname{ch}2\tau}{\tau} d\tau$
2	$\frac{1 - e^{-4t}}{t}; \int_0^t \frac{1 - e^{-4\tau}}{\tau} d\tau$
3	$\frac{\cos t - \cos 5t}{t}; \int_0^t \frac{\cos \tau - \cos 5\tau}{\tau} d\tau$
4	$\frac{e^t - \cos 2t}{t}; \int_0^t \frac{e^\tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$
5	$\frac{\operatorname{sh}3t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{sh}3\tau}{\tau} d\tau$
6	$\frac{\operatorname{ch}4t - \operatorname{ch} t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch}4\tau - \operatorname{ch} \tau}{\tau} d\tau$
7	$\frac{1 - e^{-3t}}{t}; \int_0^t \frac{1 - e^{-3\tau}}{\tau} d\tau$

Продолжение таблицы

№ варианта	Функция
8	$\frac{\cos 5t - 1}{t}; \int_0^t \frac{\cos 5\tau - 1}{\tau} d\tau$
9	$\frac{e^{3t} - \cos t}{t}; \int_0^t \frac{e^{3\tau} - \cos \tau}{\tau} d\tau$
10	$\frac{\sin 3t}{t}; \int_0^t \frac{\sin 3\tau}{\tau} d\tau$
11	$\frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} 5t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - \operatorname{ch} 5\tau}{\tau} d\tau$
12	$\frac{1 - e^{-2t}}{t}; \int_0^t \frac{1 - e^{-2\tau}}{\tau} d\tau$
13	$\frac{\cos 3t - \cos 2t}{t}; \int_0^t \frac{\cos 3\tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$
14	$\frac{e^t - \cos 4t}{t}; \int_0^t \frac{e^\tau - \cos 4\tau}{\tau} d\tau$
15	$\frac{\operatorname{sh} t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau} d\tau$
16	$\frac{e^t - t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{e^\tau - \tau - 1}{\tau^2} d\tau$
17	$\frac{e^{-t} + t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{-\tau} + \tau - 1}{\tau^2} d\tau$
18	$\frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^2}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\tau^2} d\tau$
19	$\frac{e^{3t} - e^t}{t}; \int_0^t \frac{e^{3\tau} - e^\tau}{\tau} d\tau$
20	$\frac{\cos t - e^{-t}}{t}; \int_0^t \frac{\cos \tau - e^{-\tau}}{\tau} d\tau$
21	$\frac{e^{3t} - 3t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{3\tau} - 3\tau - 1}{\tau^2} d\tau$
22	$\frac{1 - \cos 3t}{t}; \int_0^t \frac{1 - \cos 3\tau}{\tau} d\tau$

Окончание таблицы

№ варианта	Функция
23	$\frac{\operatorname{ch}2t - 1}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch}2\tau - 1}{\tau} d\tau$
24	$\frac{e^t - \operatorname{ch}4t}{t}; \int_0^t \frac{e^\tau - \operatorname{ch}4\tau}{\tau} d\tau$
25	$\frac{\operatorname{ch}t - \cos 2t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$
26	$\frac{e^{2t} - \cos 2t}{t}; \int_0^t \frac{e^{2\tau} - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$
27	$\frac{\operatorname{ch}5t - \operatorname{ch}t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch}5\tau - \operatorname{ch}\tau}{\tau} d\tau$
28	$\frac{e^{3t} - e^{-t}}{t}; \int_0^t \frac{e^{3\tau} - e^{-\tau}}{\tau} d\tau$
29	$\frac{1 - 2t - e^{-2t}}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - 2\tau - e^{-2\tau}}{\tau^2} d\tau$
30	$\frac{1 - \cos 5t}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - \cos 5\tau}{\tau^2} d\tau$

**Задача 3.** Восстановить оригинал для данной функции-изображения  $F(p)$  с помощью второй теоремы разложения, ответ проверить разложением  $F(p)$  на элементарные дроби.

№ варианта	$F(p)$	№ варианта	$F(p)$
1	$\frac{p-1}{p^2(p-2)}$	4	$\frac{p-1}{p(p-2)^2(p+3)}$
2	$\frac{p-1}{p(p-2)^2}$	5	$\frac{p^2-3p-1}{p^2(p-2)^3}$
3	$\frac{p-1}{p^2(p-2)(p+3)}$	6	$\frac{p-2}{p^2(p-3)}$

Окончание таблицы

№ варианта	$F(p)$	№ варианта	$F(p)$
7	$\frac{p-2}{p(p-3)^2}$	19	$\frac{p^2+p+1}{(p^2-1)^2}$
8	$\frac{p-2}{p^2(p-3)(p+5)}$	20	$\frac{p^2+2p-1}{(p^2+1)^2}$
9	$\frac{p-2}{p(p-3)^2(p+5)}$	21	$\frac{3p^2-3p+1}{p^3(p-1)^3}$
10	$\frac{p^2+5p-2}{p^2(p-3)^3}$	22	$\frac{3p^2+3p+1}{p^3(p+1)^3}$
11	$\frac{p+4}{p^2(p+3)}$	23	$\frac{1}{(p^2-1)(p^2-4)}$
12	$\frac{p+4}{p(p+3)^2}$	24	$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$
13	$\frac{p+4}{p^2(p+3)(p-1)}$	25	$\frac{p}{(p^2-1)(p^2-4)}$
14	$\frac{p+4}{p(p+3)(p-1)}$	26	$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$
15	$\frac{p^2+p+4}{p^2(p+3)^3}$	27	$\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$
16	$\frac{2p-1}{p^2(p-1)^2}$	28	$\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2-4)}$
17	$\frac{2p+1}{p^2(p+1)^2}$	29	$\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)}$
18	$\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$	30	$\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2-4)}$

**Задача 4.** Проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях. Проверить полученный результат.

№ варианта	Уравнение	Начальные условия
1	$x'' + x' - 2x = e^t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
2	$x'' - 9x = \operatorname{sh}3t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
3	$x'' - 4x = t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
4	$x'' - 3x' = t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
5	$x'' + x' = e^{-t}$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
6	$x'' + 2x' + x = e^{-t}$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
7	$x'' - 4x' + 5x = e^t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
8	$x'' + 4x = e^t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
9	$x'' + 2x' + 2x = \sin t$	$x(0) = 0, x'(0) = 1$
10	$x'' - x' - 6x = e^{-t}$	$x(0) = 0, x'(0) = -1$
11	$x'' - 2x' + 2x = \sin t$	$x(0) = 0, x'(0) = 1$
12	$x'' + 9x = \cos 3t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
13	$x'' + 2x' + 2x = t^2$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
14	$x'' - x' - 2x = t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
15	$x'' - 2x' = e^{2t}$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
16	$x'' + 2x = t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
17	$x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
18	$x'' - 3x' = e^{3t}$	$x(0) = 0, x'(0) = -1$
19	$x'' + 3x' + 2x = e^t$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
20	$x'' + 4x = \sin 2t$	$x(0) = 1, x'(0) = -2$
21	$x'' - 9x = \operatorname{sh}t$	$x(0) = -1, x'(0) = 3$

Окончание таблицы

№ варианта	Уравнение	Начальные условия
22	$x'' + x' = t^2$	$x(0) = 1, x'(0) = 0$
23	$x''' - 2x' - 3x = e^{-t}$	$x(0) = 1, x'(0) = -2$
24	$x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}$	$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$
25	$x''' - x' = t$	$x(0) = 0, x'(0) = 1,$ $x''(0) = 0$
26	$x''' - x' = e^t$	$x(0) = 1, x'(0) = 0,$ $x''(0) = 0$
27	$x^{IV} - x = 1$	$x(0) = 1, x'(0) = 0,$ $x''(0) = 0, x'''(0) = 0$
28	$x^{IV} - x'' = \operatorname{sht}$	$x(0) = 0, x'(0) = 0,$ $x''(0) = 0, x'''(0) = 1$
29	$x^{IV} - x''' = e^t$	$x(0) = 0, x'(0) = 0,$ $x''(0) = 0, x'''(0) = 1$
30	$x''' - 2x'' + x' = 1$	$x(0) = 0, x'(0) = 0,$ $x''(0) = 0$

**Задача 5.** Проинтегрировать систему линейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях. Проверить полученный результат.

№ варианта	Система	Начальные условия
1	$\begin{cases} x'' - x - 2y' = t, \\ x'' - x' - y'' = 1 \end{cases}$	$x(0) = 0, x'(0) = 0,$ $y(0) = 2, y'(0) = 1$
2	$\begin{cases} x'' + y' = 0, \\ y'' + x' = 1 - 2 \sin t \end{cases}$	$x(0) = 0, x'(0) = 0,$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$
3	$\begin{cases} x'' - y = te^t, \\ x'' - x' - y' = 3e^t \end{cases}$	$x(0) = 0, x'(0) = 1,$ $y(0) = 2$
4	$\begin{cases} 2y' - x'' = 2, \\ y'' + 2y + x' = 2t + 1 \end{cases}$	$x(0) = 1, x'(0) = 1,$ $y(0) = 0, y'(0) = -1$

Продолжение таблицы

№ варианта	Система	Начальные условия
5	$\begin{cases} x'' + 2x' + y' = e^{-t}, \\ y'' - x' = 0 \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$ $y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$
6	$\begin{cases} x'' + x - 2y' = 2 \cos t, \\ x' - y'' = 0, \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
7	$\begin{cases} x'' - 2y = e^t, \\ y'' + 2x = -3e^t \end{cases}$	$x(0) = -1, \quad x'(0) = 0,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
8	$\begin{cases} x'' + y' = \operatorname{sh} t, \\ y'' + x' - y = 2t \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
9	$\begin{cases} x'' + y'' = 0, \\ x' + y = 1 + e^t \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
10	$\begin{cases} x'' + x' + y = t, \\ x' + x - y'' = 1 \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 1,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
11	$\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = 2 \sin t \end{cases}$	$x(0) = -1, \quad x'(0) = 1,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
12	$\begin{cases} x'' + y' = t, \\ y'' - x' = 1 \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = -1,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
13	$\begin{cases} x'' - y' = t, \\ y'' - x' = 0 \end{cases}$	$x(0) = -1, \quad x'(0) = 0,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
14	$\begin{cases} x'' + x + 2y' = 2, \\ x' + y'' = \cos t \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
15	$\begin{cases} x'' + x' - y' = 1, \\ x' + x - y'' = 1 + 4e^{-t} \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
16	$\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x' - y'' = 2 \cos t \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
17	$\begin{cases} x'' - 2x' + y' = -6e^{-t}, \\ x' - y'' = 2e^{-t} \end{cases}$	$x(0) = -1, \quad x'(0) = 6,$ $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$
18	$\begin{cases} x'' - y' = t, \\ y'' + x' = 0 \end{cases}$	$x(0) = -1, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$



Окончание таблицы

№ варианта	Система	Начальные условия
19	$\begin{cases} x'' - x - y' = \cos t, \\ x' + y'' = e^t \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
20	$\begin{cases} x'' + y' = \operatorname{sh} t - \sin t - t, \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
21	$\begin{cases} x'' + 2y = e^{-t}, \\ x' + x - y'' + y = 0 \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
22	$\begin{cases} x'' - x + 2y = t, \\ y'' - x' = te^{-t} \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/2$
23	$\begin{cases} x'' - x' + y' = e^{-t} + \cos t, \\ x' - y'' - y' = 2e^t + \sin t \end{cases}$	$x(0) = 2, \quad x'(0) = 1,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
24	$\begin{cases} x'' - x' + y = \sin t, \\ y'' - x' + y = e^t \end{cases}$	$x(0) = -1, \quad x'(0) = 0,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
25	$\begin{cases} x'' + y' + y = e^t - t, \\ x' - x + 2y'' - y = -e^{-t} \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
26	$\begin{cases} x'' - y = \operatorname{sh} t - t, \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - 1 \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = -1,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
27	$\begin{cases} x'' - y' + y = \cos t - t, \\ x' + y'' = -2t \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
28	$\begin{cases} x'' + 2y' = 0, \\ x' + y'' + 2y = 4e^{2t} \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$
29	$\begin{cases} x'' - x + y = 1 - \frac{t^2}{2}, \\ x' + y'' = e^t \end{cases}$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
30	$\begin{cases} x'' - y = te^t, \\ x'' - x' + y'' - y = e^t + 2t \end{cases}$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волков И.К., Канатников А.Н.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.
2. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1984.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
5. *Лошкарев А.И., Облакова Т.В.* Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора и задача Коши: Методические указания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
9. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>1. Преобразование Фурье</b> .....	5
1.1. Ряд Фурье и интегральная формула Фурье .....	5
1.2. Некоторые свойства преобразования Фурье .....	8
1.3. Примеры вычисления преобразования Фурье .....	10
1.4. Бесконечно короткий импульс с единичной площадью. $\delta$ -функция .....	16
1.5. Первообразная от $\delta$ -функции. Функция единичного скачка .....	20
1.6. Спектры периодических сигналов и $\theta$ -функции .....	22
1.7. Некоторые приложения преобразования Фурье .....	25
<b>2. Преобразование Лапласа</b> .....	29
2.1. Переход от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа .	29
2.2. Одностороннее преобразование Лапласа .....	31
2.3. Основные свойства преобразования Лапласа .....	33
2.4. Теоремы разложения .....	45
<b>3. Некоторые приложения операционного исчисления</b> .....	49
3.1. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами .....	49
3.2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами .....	55
3.3. Решение задач математической физики .....	59
3.4. Решение интегральных уравнений .....	61
<b>Приложение. Варианты типового расчета</b> .....	63
<b>Список литературы</b> .....	73