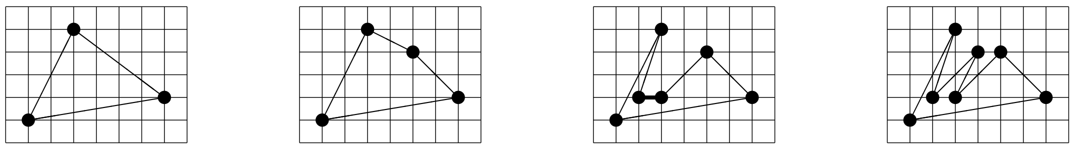
Формула Пика

$$\boxed{S = N_{\text{внутри}} + \frac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1}$$

(1) Длина стороны клетки равна 1. Вычислите площадь фигуры:

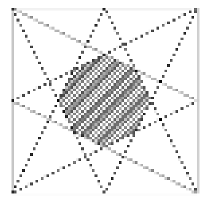


(2) Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

(3) Докажите, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, не содержащего узлы ни внутри, ни на границе (за исключением вершин), равна $1/2$.

(4) Пусть произвольный многоугольник M с вершинами в узлах клетчатой бумаги разбит на несколько многоугольников $M_1, M_2, ..., M_k$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что если для $M_1, M_2, ..., M_k$ справедлива формула Пика, то для M — тоже.

(5) Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как это показано на рисунке. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.



(6) Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то еще узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

(7) Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?

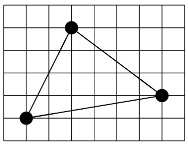
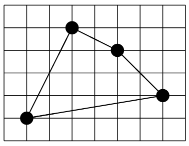
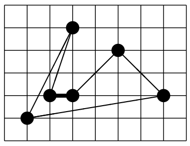
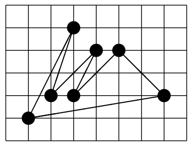
(8) Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решётки.

(9) На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Диагонали этого пятиугольника пересекаются в точках P, Q, R, S, T. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $PQRST$ есть хотя бы одна целая точка.

Формула Пика

$$\boxed{S = N_{\text{внутри}} + \frac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1}$$

(1) Длина стороны клетки равна 1. Вычислите площадь фигуры:

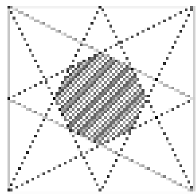
   

(2) Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторыи момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

(3) Докажите, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, не содержащего узлы ни внутри, ни на границе (за исключением вершин), равна $1/2$.

(4) Пусть произвольный многоугольник M с вершинами в узлах клетчатой бумаги разбит на несколько многоугольников $M_1, M_2, ..., M_k$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что если для $M_1, M_2, ..., M_k$ справедлива формула Пика, то для M — тоже.

(5) Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как это показано на рисунке. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.



(6) Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то еще узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

(7) Какие правильные многоугольники могут иметь все вершины в узлах клетчатой бумаги?

(8) Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решётки.

(9) На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Диагонали этого пятиугольника пересекаются в точках P, Q, R, S, T. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $PQRST$ есть хотя бы одна целая точка.