Сопоставление

1. Докажите, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, ..., 10^{k+1}$.

2. На каждом из полей верхней и нижней горизонтали доски 7×7 стоит по фишке: внизу – белые, вверху – чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все чёрные фишки стояли внизу, а белые – вверху?

3. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

4. В некоторой стране из каждого города выходит ровно 1000 дорог, причём из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. Террористы взорвали одну из дорог. Докажите, что и после этого можно из любого города добраться до любого.

5. В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов – по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.

6. Докажите, что нельзя занумеровать рёбра куба числами 1, 2, ..., 11, 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё рёбер была одной и той же.

7. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

8. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000}\left\lfloor\sqrt[3]{\frac{1000000}{k^2}}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{100}\left\lfloor\sqrt{\frac{1000000}{k^3}}\right\rfloor$.

9. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов $(m < n)$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.

Сопоставление

1. Докажите, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, ..., 10^{k+1}$.

2. На каждом из полей верхней и нижней горизонтали доски 7×7 стоит по фишке: внизу – белые, вверху – чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все чёрные фишки стояли внизу, а белые – вверху?

3. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

4. В некоторой стране из каждого города выходит ровно 1000 дорог, причём из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. Террористы взорвали одну из дорог. Докажите, что и после этого можно из любого города добраться до любого.

5. В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов – по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.

6. Докажите, что нельзя занумеровать рёбра куба числами 1, 2, ..., 11, 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё рёбер была одной и той же.

7. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

8. Докажите, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000}\left[\sqrt[3]{\frac{1000000}{k^2}}\right]=\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{\frac{1000000}{k^3}}\right]$.

9. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов ($m < n$). В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.