8 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональным называют уравнение, содержащее переменную под знаком радикала.

Область допустимых значений иррационального уравнения состоит из тех значений переменной, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Для решения иррациональных уравнений в простейших случаях используют: метод замены переменной, метод «уединения» радикала, метод приведения к смешанной системе уравнений и неравенств.

8.1. Уравнения четной степени корня

Рассмотрим метод «уединения» радикала, который состоит в том, что, оставляя радикал в одной части уравнения, возводят обе части этого уравнения в соответствующую степень до тех пор, пока не получат уравнение, не содержащее радикалов. При возведении уравнения в четную степень необходимо помнить, что обе его части не должны быть отрицательными.

Методы решений уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)}=g(x)$, то ОДЗ: $f(x)\geq 0$.

Возведя обе части уравнения в квадрат (в общем случае в любую четную степень), при условии, что $g(x)\geq 0$, получим:

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2=g^2(x),\ f(x)=g^2(x).$$

2. Если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$, то

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases} f(x)\geq 0,\\ g(x)\geq 0,\\ \varphi(x)\geq 0.\end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2=$ $=\left(\sqrt{\varphi(x)}\right)^2$, «уединим» радикал, приведем подобные слагаемые и снова возведем обе части полученного уравнения в квадрат при условии, что обе части уравнения не отрицательны.

3. Если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$, то

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$$

Перенесем отрицательное слагаемое в правую часть уравнения $\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)} + \sqrt{g(x)}$ и дважды возведем обе его части в квадрат, при условии, что обе части уравнений не отрицательны.

8.2. Уравнения нечетной степени корня

Методы решений уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $\sqrt[3]{f(x)} = \varphi(x)$, то, возведя обе части этого уравнения в куб, получим равносильное ему уравнение

$$f(x) = \varphi^3(x).$$

2. Если уравнение имеет вид $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$, то выполним следующие действия:

1) перенесем один радикал в правую часть уравнения:

$$\sqrt[3]{f(x)} = \varphi(x) - \sqrt[3]{g(x)};$$

2) возведем обе части уравнения в куб:

$$f(x) = \left(\varphi(x) - \sqrt[3]{g(x)}\right)^3;$$

3) применим подстановку $\sqrt[3]{g(x)} = a$ и получим уравнение, не содержащее переменную под знаком радикала.

Заметим, что уравнение $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$ можно решить иначе:

1) возведем обе части уравнения в куб:

$$\left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right)^3 = \varphi^3(x);$$

2) согласно формуле $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a + b)$ запишем:

$$f(x) + g(x) + 3\varphi(x)\sqrt[3]{f(x)g(x)} = \varphi^3(x);$$

3) «уединим» радикал и снова возведем обе части уравнения в куб. В результате получим уравнение, не содержащее переменную под знаком радикала.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–4):

1. Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно:

1) $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{l} f(x) = g^2(x), \\ f(x) > 0; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} f(x) = g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{array}\right.$

5) $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно уравнению:

1) $f(x) = g(x)$;

2) $|f(x)| = |g(x)|$;

3) $f^2(x) = g^2(x)$;

4) $f(x) = g(x)$ при условии, что $f(x) < 0$ и $g(x) < 0$;

5) $f(x) = g(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$;

3. Уравнение $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$ равносильно уравнению:

1) $f(x) = g^3(x)$;

2) $f(x) = g^3(x)$ при условии, что $g(x) \geq 0$;

3) $f(x) = g^3(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$;

4) $f(x) = g^6(x)$;

5) $|f(x)| = g^3(x)$.

4. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt[5]{g(x)}$ равносильно уравнению:

1) $f^5(x) = g^2(x)$;

2) $f^2(x) = g^5(x)$;

3) $f^{10}(x) = g^{10}(x)$;

4) $f^{10}(x)=g^{10}(x)$ при условии, что $g(x)\geq 0$;

5) $f^{10}(x)=g^{10}(x)$ при условии, что $f(x)\geq 0$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Номер правильного ответа	2	5	1	4

Примеры

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-6=\dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}$.

Решение. Полагая, что $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=a$ ($a\neq 0$), получим:

$$a-6-\frac{16}{a}=0,\ a^2-6a-16=0, \text{ откуда } a_1=-2 \text{ и } a_2=8.$$

Учитывая подстановку $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=a$, решим два уравнения:

1) $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=-2$, $(5x+2)^{\frac{3}{5}}=-2$, $5x+2=(-2)^{\frac{5}{3}}$, $5x+2=$ $=-2\cdot(-2)^{\frac{2}{3}}$, $5x=-2\sqrt[3]{4}-2$, $5x=-2\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$, $x=-0{,}4\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$;

2) $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=8$, $(5x+2)^{\frac{3}{5}}=2^3$, $5x+2=2^5$, $x=6$.

Ответ: $x_1=-0{,}4\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$, $x_2=6$.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}-6=0$.

Решение. Полагая $\sqrt[4]{x^3+8}=a$ и $\sqrt{x^3+8}=a^2$, получим $a^2+a-6=0$, откуда $a_1=-3$, $a_2=2$. Учитывая подстановку $\sqrt[4]{x^3+8}=a$ решим уравнение $\sqrt[4]{x^3+8}=2$. Тогда $x^3+8=16$, откуда $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}=\sqrt[5]{x\sqrt{x}}+56$.

Решение. Применим свойства степеней и запишем уравнение в виде $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{10}}-x^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{10}}-56=0$ или $x^{\frac{6}{10}}-x^{\frac{3}{10}}-56=0$.

Полагая $x^{\frac{3}{10}}=a$, получим $a^2-a-56=0$, откуда $a_1=-7$, $a_2=8$.

Учитывая подстановку $x^{\frac{3}{10}}=a$ ($a\geq 0$) найдем значение x:

$$x^{\frac{3}{10}}=2^3,\ x^{\frac{1}{10}}=2,\ x=2^{10},\ x=1024.$$

Ответ: 1024.

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{3}{4}$.

Решение. Уравнение запишем в виде $\dfrac{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}}=\dfrac{3}{4}$.

Полагая $\sqrt[6]{x}=a$ ($a>0$), получим:

$$\frac{a^3+a^2}{a^3-a^2}=\frac{3}{4},\ \frac{a^2(a+1)}{a^2(a-1)}=\frac{3}{4},\ \frac{a+1}{a-1}=\frac{3}{4},\ 4a+4=3a-3,\ a=-7.$$

Уравнение $\sqrt[6]{x}=-7$ корней не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 5. Найдите сумму корней уравнения

$$0{,}5x^2-2x-3=0{,}5\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на 4, получим:

$$2x^2-8x-12=2\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Полагая $\sqrt{2x^2-8x+12}=a$, запишем:

$$2x^2-8x+12=a^2,\ 2x^2-8x=a^2-12.$$

Тогда исходное уравнение примет вид $a^2-12-12=2a$ или $a^2-2a-24=0$, откуда $a_1=6$, $a_2=-4$.

Поскольку $a\geq 0$, то решим уравнение $\sqrt{2x^2-8x+12}=6$. Тогда $2x^2-8x+12=36$, $x^2-4x-12=0$, откуда по теореме Виета $x_1+x_2=4$.

Ответ: 4.

Пример 6. Решите уравнение $1+\sqrt{1+x\sqrt{x-4}}=x$.

Решение. ОДЗ: $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$.

1. «Уединим» радикал: $\sqrt{1+x\sqrt{x-4}}=x-1$.

2. Возведем обе части уравнения в квадрат. Поскольку правая часть этого уравнения положительна на ОДЗ, получим:

$$1+x\sqrt{x-4}=x^2-2x+1,\ x\sqrt{x-4}=x^2-2x.$$

Так как число 0 не является корнем уравнения, то разделим обе его части на x и запишем: $\sqrt{x-4}=x-2$.

3. Поскольку правая часть уравнения $\sqrt{x-4}=x-2$ положительна на ОДЗ, то возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$x-4=x^2-4x+4,\ x^2-5x+8=0, \text{ откуда } x\in\varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

Пример 7. Определите число корней уравнения

$$\sqrt{2x-9}+\sqrt{x-8}=\sqrt{x+5}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}2x-9\ge 0,\\ x-8\ge 0,\\ x+5\ge 0;\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 8.$

1. Возведем обе части уравнения в квадрат и «уединим» радикал:

$$\left(\sqrt{2x-9}+\sqrt{x-8}\right)^2=\left(\sqrt{x+5}\right)^2,$$

$$2x-9+2\sqrt{(2x-9)(x-8)}+x-8=x+5,$$

$$2\sqrt{(2x-9)(x-8)}=-2x+22,\ \sqrt{(2x-9)(x-8)}=11-x.$$

2. Снова возведем обе части полученного уравнения в квадрат при условии, что его правая часть неотрицательна, то есть $x\le 11$:

$$(2x-9)(x-8)=x^2-22x+121,\ x^2-3x-49=0,$$

$$\text{откуда, } x_1=\frac{3+\sqrt{205}}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{205}}{2}.$$

Так как $x_2=\dfrac{3-\sqrt{205}}{2}$ – посторонний корень уравнения, то данное уравнение имеет единственный корень $x_1=\dfrac{3+\sqrt{205}}{2}$.

Ответ: 1.

Пример 8. Найдите модуль разности корней уравнения

$$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}3x+7\ge 0,\\ x+1\ge 0;\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1.$

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3x+7}=\sqrt{x+1}+2$ и возведем обе его части в квадрат:

$$3x+7=x+1+4\sqrt{x+1}+4,\ 4\sqrt{x+1}=2x+2,\ 2\sqrt{x+1}=x+1.$$

Полагая $\sqrt{x+1}=a$, получим $a^2=2a$; $a(a-2)=0$, откуда $a_1=0$, $a_2=2$.

Тогда $\sqrt{x+1}=0$, откуда $x=-1$ или $\sqrt{x+1}=2$, откуда $x=3$.

Найдем модуль разности корней уравнения: $|-1-3|=4$.

Ответ: 4.

Пример 9. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}-3=0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{x-1}}=3-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}$$

и возведем обе его части в куб. Получим:

$$\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{x-1}}\right)^3=\left(3-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}\right)^3,$$

$$6+\sqrt{x-1}=27-27\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}+9\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}\right)^2-3+\sqrt{x-1},$$

$$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}\right)^2-3\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}+2=0.$$

Применим подстановку $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=a$.

Решая уравнение $a^2-3a+2=0$, получим $a_1=1$, $a_2=2$.

Учитывая подстановку $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=a$, решим два уравнения:

1) $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=1$, $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}\right)^3=1^3$, $3-\sqrt{x-1}=1$, $\sqrt{x-1}=2$, $x-1=4$, $x=5$;

2) $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=2$, $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}\right)^3=2^3$, $3-\sqrt{x-1}=8$, $\sqrt{x-1}=-5$, $x\in\varnothing$.

Ответ: 5.

Пример 10. Решите уравнение $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$.

Решение. Полагая $\sqrt{x+2}=a$ и $\sqrt[3]{3x+2}=b$, получим:

$$a^2=x+2,\ 3a^2=3x+6,\ b^3=3x+2.$$

Тогда $3a^2-b^3=3x+6-3x-2=4$.

Заменим уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$ равносильной ему системой уравнений $\begin{cases}a-b=0,\\ 3a^2-b^3=4.\end{cases}$

Поскольку $a=b$, то второе уравнение системы примет вид $3a^2-a^3=4$ или $a^3-3a^2+4=0$. Очевидно, что число -1 является корнем этого уравнения.

Выполним деление многочлена a^3-3a^2+4 на двучлен $a+1$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,a^3-3a^2+4 & a+1 \\
\underline{a^3+a^2} & \overline{a^2-4a+4} \\
-\,-4a^2+4 & \\
\underline{-4a^2-4a} & \\
-\,4a+4 & \\
\underline{4a+4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Запишем $(a+1)\left(a^2-4a+4\right)=0$ или $(a+1)(a-2)^2=0$, откуда $a_1=-1$ (этот корень уравнения был уже найден) и $a_{2,3}=2$.

Поскольку $\sqrt{x+2}=a\geq 0$, то $\sqrt{x+2}=2$, $x+2=4$ и $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 11. Определите значение a, при котором уравнение $(x+3a)\sqrt{x-4}=0$ имеет один корень.

Решение. Запишем ОДЗ: $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$.

Найдем корни уравнения, решая совокупность уравнений $\sqrt{x-4}=0$, откуда $x_1=4$ и $x+3a=0$, откуда $x_2=-3a$. Очевидно, что $x_1=4$ – корень уравнения. Поскольку согласно условию задачи уравнение имеет один корень, то $x_2=-3a$ – посторонний корень, то есть он не принадлежит области допустимых значений уравнения. В таком случае $-3a<4$ и $a>-\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $a>-\dfrac{4}{3}$.

Пример 12. Найдите произведение корней уравнения

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(2-\sqrt{2x+3}\right)=-x.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+1\geq 0, \\ 2x+3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ x\geq -1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -1$.

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}-2-x=0$$

и разложим его левую часть на множители:

$$\left(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+3}\right)-\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\left(\sqrt{x+1}+x+1\right)=0,$$

$$\sqrt{2x+3}\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)=0,$$

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{x+1}\right)=0.$$

Поскольку $\left(\sqrt{x+1}+1\right)>0$, то данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{x+1}=0$ или уравнению $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}$, возводя обе части которого в квадрат, получим:

$$2x+3=1+2\sqrt{x+1}+x+1,\ x+1-2\sqrt{x+1}=0,\ \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $\sqrt{x+1}=0$, откуда $x=-1$ и $\sqrt{x+1}=2$, откуда $x=3$.

Так как оба корня принадлежат области допустимых значений уравнения, то найдем их произведение: $-1\cdot 3=-3$.

Ответ: -3.

Пример 13. Решите уравнение

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=6.$$

Решение. Преобразуем выражения, записанные под знаками радикалов:

$$x-4\sqrt{x-4}=x-4-4\sqrt{x-4}+4=\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2;$$

$$x+4\sqrt{x-4}=x-4+4\sqrt{x-4}+4=\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2.$$

Данное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}+2\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}=6 \text{ или}$$

$$\left|\sqrt{x-4}-2\right|+2\left|\sqrt{x-4}+2\right|=6.$$

Запишем ОДЗ уравнения: $x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\in[4;\ +\infty)$.

Тогда $\left|\sqrt{x-4}+2\right|=\sqrt{x-4}+2$ (см. п. 10.2) и получим $\left|\sqrt{x-4}-2\right|+2\sqrt{x-4}-2=0$. Решим это уравнение методом интервалов согласно алгоритму, приведенному в п. 10.3.

1. Найдем нули функции, стоящей под знаком модуля, решая уравнение $\sqrt{x-4}-2=0$, откуда $x=8$.

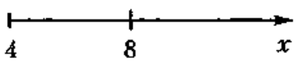

Рис. 8.1

2. Нанесем число $x=8$ на ОДЗ уравнения (рис. 8.1) и рассмотрим полученные промежутки:

1) если $x \in [4; 8]$, то $\sqrt{x-4}-2<0$, следовательно,

$\left|\sqrt{x-4}-2\right| = -\sqrt{x-4}+2$ и уравнение примет вид

$-\sqrt{x-4}+2+2\sqrt{x-4}-2=0$ или $\sqrt{x-4}=0$, откуда $x=4$;

2) если $x \in (8; +\infty)$, то $\sqrt{x-4}-2>0$, следовательно,

$\left|\sqrt{x-4}-2\right| = \sqrt{x-4}-2$ и уравнение примет вид

$\sqrt{x-4}-2+2\sqrt{x-4}-2=0$ или $\sqrt{x-4}=\frac{4}{3}$, откуда $x=5\frac{7}{9}$.

Так как число $5\frac{7}{9}$ не принадлежит рассматриваемому промежутку, то $x=5\frac{7}{9}$ – посторонний корень уравнения.

Ответ: 4.

Пример 14. Найдите произведение корней уравнения

$$\frac{\sqrt[3]{x+3}}{x}+\frac{\sqrt[3]{x+3}}{3}=\frac{16\sqrt[3]{x}}{3}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{(x+3)^{\frac{1}{3}}}{x}+\frac{(x+3)^{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{16x^{\frac{1}{3}}}{3}$$

и умножим обе его части на выражение $3x \neq 0$. Получим:

$$3(x+3)^{\frac{1}{3}}+x(x+3)^{\frac{1}{3}}=16x^{\frac{4}{3}},\ (x+3)^{\frac{1}{3}}(x+3)=16x^{\frac{4}{3}},$$

$$(x+3)^{\frac{4}{3}}=2^4x^{\frac{4}{3}},\ (x+3)^4=2^{12}x^4.$$

Тогда $x+3=8x$, откуда $x=\frac{3}{7}$ или $x+3=-8x$, откуда $x=-\frac{1}{3}$.

Найдем произведение корней уравнения: $-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}$.

Ответ: $-\frac{1}{7}$.

Пример 15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{-x}+\sqrt[3]{-y}=-3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$$

Решение. Полагая $\sqrt[3]{x}=a$, $\sqrt[3]{y}=b$ систему уравнений запишем

в виде $\begin{cases}a+b=3,\\ a^2-ab+b^2=3.\end{cases}$

Преобразуем второе уравнение системы:

$$a^2+2ab+b^2-3ab=3\,,\ (a+b)^2-3ab=3\,.$$

Поскольку $a+b=3$, то получим $9-3ab=3$, $ab=2$ и запишем:

$$\begin{cases} a+b=3, \\ ab=2. \end{cases}$$

Очевидно, что решением системы являются две пары чисел:

$$a_1=1\,,\ b_1=2\ \text{и}\ a_2=2\,,\ b_2=1\,.$$

Учитывая подстановку $\sqrt[3]{x}=a$, $\sqrt[3]{y}=b$, получим:

1) $\sqrt[3]{x}=1$, $\sqrt[3]{y}=2$, откуда $x=1,\ y=8$;

2) $\sqrt[3]{x}=2$, $\sqrt[3]{y}=1$, откуда $x=8,\ y=1$.

Ответ: $(1;\,8)$; $(8;\,1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–29):

1. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}-\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{x-5}}-2=0$.

2. $\left(\dfrac{x+5}{16x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=1$.

3. $0{,}5\sqrt{x^2+32}-\sqrt[4]{x^2+32}-1{,}5=0$.

4. $\sqrt[3]{-x}-2{,}5\sqrt[6]{x}+9=0$.

5. $2\sqrt[4]{3x+10^{-1}}+1=3\sqrt{3x+10^{-1}}$.

6. $\dfrac{5}{2x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}=0{,}6$.

7. $0{,}25x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{(-x)^2}+1=0$.

8. $\dfrac{1}{2^{-1}\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{10}=1$.

9. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{-x}-1}=4$.

10. $2^{-3}x\sqrt[3]{x}+2=\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$.

11. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}=22\sqrt[30]{x^{14}}$.

12. $x^2+4\sqrt{x^2+3x-6}=18-3x$.

13. $2{,}1\sqrt{2{,}1x+1}+3{,}1=2{,}1x+1$.

14. $\sqrt{42-x}-\sqrt{6-x}=2$.

15. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}-2x+2}{x-1}=0$.

16. $\sqrt{x+6}-\sqrt{3x-26}-\sqrt{x-6}=0$.

17. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt[6]{x^3}=0$.

18. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}-\sqrt{16}=0$.

19. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}-\sqrt{2}\sqrt{x-6}=0$.

20. $\sqrt{5+x^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{5-x^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{x}$.

21. $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-9}-\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=-4$.

22. $\sqrt[3]{24+x^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{5+x^{\frac{1}{2}}}+1$.

23. $\sqrt[3]{x+34}+\sqrt[3]{3-x}=1$.

24. $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}-1=0$.

25. $\sqrt{x+2}=\sqrt[9]{(3x+2)^3}$.

26. $\dfrac{\sqrt{4x+16}+2\sqrt{x-4}+24}{4}=x+\sqrt{x^2-16}$.

27. $\sqrt{3x^2-2x+15}=7-\sqrt{3(-x)^2-2x+8}$.

28. $\dfrac{(5-x)^{\frac{3}{2}}+(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.

29. $\dfrac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2-x}}+3$.

Решите системы уравнений (30–38):

30. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91, \\ 2x+2(xy)^{0,5}+2y=26. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{2x+2y}-\sqrt{2x-2y}=\sqrt{128}. \end{cases}$

32. $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{2}}+(x-y)^{\frac{1}{3}}=6, \\ \sqrt[18]{(x+y)^9(x-y)^6}=2^3. \end{cases}$

33. $\begin{cases}\sqrt{yx^{-1}}-2\sqrt{xy^{-1}}=1,\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4.\end{cases}$

34. $\begin{cases}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}=12,\\ xy=2^6.\end{cases}$

35. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2^2,\\ 2^{-2}x+2^{-2}y-7=0.\end{cases}$

36. $\begin{cases}y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=3\sqrt{2},\\ xy^2-x^2y=30.\end{cases}$

37. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{8}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=7,\\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3.\end{cases}$

38. $\begin{cases}3\left(2-(x-y)^{0,5}\right)^{-1}+10\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=5,\\ 8\left(2-(x-y)^{0,5}\right)^{-1}-10\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=6.\end{cases}$

39. Найдите произведение модулей корней уравнения

$$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}-\sqrt[5]{\frac{1-x}{16x}}=\frac{5}{2}.$$

40. Найдите произведение квадратов корней уравнения

$$1{,}5\sqrt[3]{x}-2{,}5\sqrt[3]{x^{-1}}-x^{-1}=0.$$

41. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$x^2-20+\sqrt{x^2+20}=2.$$

42. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt[3]{x-3}-\sqrt{6+x}+3=0$.

43. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{-2(5x+2)}-9=0$.

44. Определите количество корней уравнения

$$\sqrt[15]{(x+7)^5}=\sqrt{x+3}.$$

Ответы: **1.** $x=1$. **2.** $x=\frac{5}{3}$. **3.** $x_{1,2}=\pm 7$. **4.** $x=64$. **5.** $x=0{,}3$. **6.** $x=12$. **7.** $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$. **8.** $x_1=8;\ x_2=27$. **9.** $x=8$. **10.** $x=8$.

11. $x_1 = 0$; $x_2 = 4$. **12.** $x_1 = -5$; $x_2 = 2$. **13.** $x = 4{,}1$. **14.** $x = -58$. **15.** $x = 3$. **16.** $x = 10$. **17.** $x = 4$. **18.** $x = 5$. **19.** $x_1 = 8$; $x_2 = 7$. **20.** $x = 64$. **21.** $x = 0$. **22.** $x = 9$. **23.** $x_1 = -61$; $x_2 = 30$. **24.** $x_1 = 4$; $x_2 = -3$. **25.** $x = 2$. **26.** $x = 5$. **27.** $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{3}$. **28.** $x_1 = 3$; $x_2 = 5$. **29.** $x = 4$. **30.** $(1; 9)$; $(9; 1)$. **31.** $(41; 40)$. **32.** $(12; 4)$; $(34; -30)$. **33.** $(1; 4)$. **34.** $(1; 64)$; $(64; 1)$. **35.** $(1; 27)$; $(27; 1)$. **36.** $(0{,}5; 8)$. **37.** $(124; 76)$. **38.** $(5; 4)$. **39.** $\frac{2}{511}$. **40.** 64. **41.** 32. **42.** 28. **43.** 6. **44.** 1.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\frac{x}{x+1} - 3 = \sqrt{\frac{4x+4}{x}}$	1) $\frac{31}{6}$; 2) $\frac{17}{9}$; 3) $\frac{23}{3}$; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) -3.
2	Разность наибольшего и наименьшего корней уравнения $4\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + 4\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = 17$ равна	1) $\frac{13}{27}$; 2) $\frac{9843}{431}$; 3) $\frac{514}{255}$; 4) $\frac{40}{51}$; 5) $-2\frac{4}{25}$.
3	Корень уравнения $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+24} = 14$ заключен между целыми числами, сумма которых равна	1) 10; 2) 20; 3) −4; 4) 8; 5) 80.
4	Корень уравнения $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} + 1 = x$ принадлежит промежутку	1) $[1; 3]$; 2) $[2; 4]$; 3) $(-5; 0)$; 4) $(3; 6]$; 5) $[10; 11)$.

№	Задания	Варианты ответов
5	Если k – количество корней уравнения $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{1-x}=0$, а x_0 – его отрицательный корень, то значение выражения k^3x^2 равно	1) 16; 2) 332; 3) 77; 4) 1; 5) 8.
6	Среднее арифметическое корней уравнения $(x+4)(x+1)-6=3\sqrt{x^2+5x+2}$ равно	1) 2,5; 2) 3; 3) –2,5; 4) –4,5; 5) 13.
7	Сумма корней уравнения $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$ равна	1) 10; 2) –1; 3) 11; 4) 1,3; 5) 3.
8	Среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2-x}=-\sqrt[3]{3-2x}$ равно	1) 1,5; 2) 1,25; 3) 1; 4) 1,75; 5) 4.
9	Разность большего и меньшего корней уравнения $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1$ равна	1) 19; 2) –4; 3) 2; 4) 4,5; 5) 9.
10	Найдите произведение корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{x+2\sqrt{x+7}+8}+\sqrt{x-\sqrt{x+7}+1}=4$	1) 1; 2) 10,5; 3) –1,2; 4) 2; 5) 2,2.
11	Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $2^{-1}\sqrt{x}+\dfrac{x+2^{-1}}{x+2}=2^0$	1) 1; 2) –12; 3) 4,3; 4) 8,2; 5) 15,5.
12	Если $(x;\,y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=0,5\sqrt{xy},\\ 0,2x+0,2y=1,\end{cases}$ то сумма чисел x и y равна	1) 0,1; 2) 1,4; 3) –5; 4) 5; 5) –17.

№	Задания	Варианты ответов
13	Если $(x; y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4, \end{cases}$ то значение выражения $\sqrt[4]{xy}$ равно	1) 3; 2) 1; 3) 2; 4) 1,5; 5) 5.
14	Если $(x; y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} x^{\frac{-1}{2}}\sqrt[3]{x}+y^{\frac{-1}{2}}\sqrt[3]{y}=1{,}5, \\ xy=64, \end{cases}$ то значение выражения $\lvert x-y \rvert$ равно	1) 60; 2) 64; 3) 63; 4) 65; 5) 3.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	4	3	5	1	4	3	2
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	1	3	4	1	4	1	3