САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. Можно ли на доске 4×4 расставить чёрных и белых коней по одному в каждой клетке так, чтобы каждый белый конь бил ровно одного чёрного, а каждый чёрный конь бил ровно одного белого? (*А. Смирнов*)

2. Натуральное число делится на 42. Сумма цифр, не участвующих в его написании, равна 25. Докажите, что в нем есть две одинаковые цифры. (*К. Кохась*)

3. Вася съедает в день или 3 сосиски и 1 котлету, или 5 сосисок и 3 котлеты, или 4 сосиски и 2 котлеты. За несколько дней Вася съел 100 котлет. Мог ли он за тот же период времени съесть 166 сосисок? (*Ф. Бахарев*)

4. У Саши и Феди есть клетчатая полоска 1 на 100, на которой они играют в следующую игру. На левых пятидесяти клетках этой полоски лежит по одному камню. За один ход разрешается либо передвинуть один камень на одну клетку вправо, если та свободна, либо выкинуть два камня, находящихся в соседних клетках. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает, если первым ходит Федя? (*Ф. Бахарев*)

. . . .

Олимпиада 2010 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Есть 100 монет: 99 настоящих (они весят поровну) и одна фальшивая (весит легче настоящих). У Феди есть двухчашечные весы. На чаши весов можно класть по одной монете и весы показывают один из трех возможных результатов: либо перевесила левая чаша, либо перевесила правая чаша, либо установилось равновесие. К сожалению, Федины весы безнадежно испорчены: они *всегда* показывают неверный результат взвешивания. Как с помощью этих весов Федя сможет найти 98 настоящих монет? (*Ф. Петров*)

6. В клетках доски 900×900 расположены 9 маляров. За один ход первый маляр смещается на соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали, второй маляр смещается на две клетки по горизонтали или на две клетки по вертикали, и т. д., 9-й маляр смещается на 9 клеток по горизонтали или на 9 клеток по вертикали. Раз в минуту все маляры *одновременно* делают ход, и сразу красят клетки, на которых оказались, в черный цвет. (На одной клетке могут оказаться несколько маляров, тогда они вместе красят эту клетку в чёрный цвет.) Вначале вся доска была белая. Через некоторое время вся доска оказалась чёрной. Докажите, что хотя бы один из маляров за это время побывал на закрашенной ранее клетке. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

---

1. Натуральное число делится на 42. Сумма цифр, не участвующих в его написании, равна 25. Докажите, что в нем есть две одинаковые цифры. (*К. Кохасъ*)

2. По кругу сидят 100 детей: 50 мальчиков и 50 девочек. Докажите, что найдутся мальчик и девочка, между которыми сидят ровно двое детей, причем это тоже мальчик и девочка. (*С. Берлов*)

3. Будем говорить, что натуральное число a загадочнее числа b, если при делении 839 на a в остатке получается b. Докажите, что не существует 10 подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых (кроме самого меньшего из них) загадочнее предыдущего. (*К. Кохасъ*)

4. У Саши и Феди есть клетчатая полоска 1 на 100. На левых пятидесяти клетках этой полоски лежит по одному камню. За один ход разрешается либо передвинуть один камень на одну клетку вправо, если та свободна, либо выкинуть два камня, находящихся в соседних клетках. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает, если первым ходит Федя? (*Ф. Бахарев*)

. . . .

Олимпиада 2010 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. AD — биссектриса треугольника ABC, DE — биссектриса треугольника ADC. Оказалось, что $CD = AB$, $AD = CE$. Докажите, что угол $\angle CDA < 120°$.

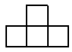
(*А. Смирнов*)

6. Шахматная фигура “маляр” ходит в соседнюю по стороне клетку и перекрашивает ее в противоположный цвет. Маляр стоит на белой угловой клетке шахматной доски. За какое наименьшее число ходов он сможет перекрасить доску в белый цвет? (*Е. Куликова*)

7. У часовщика есть 5 будильников (с 12-часовыми циферблатами). Каждый из них звонит, когда его стрелки показывают 12 часов. Будильники идут с правильной скоростью, но могут показывать неправильное время, отличающееся от истинного на целое число часов. В середине каждого часа часовщик выбирает один из будильников и переводит его стрелки на 1, 2, 3, 4, 5 или 6 часов вперед. Он стремится к тому, чтобы по истечении каждого часа хотя бы один из будильников зазвонил. Докажите, что рано или поздно он не сможет этого добиться. (*О. Иванова, С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 8 КЛАСС.

---

1. Дан квадрат 10×10 клеток. Каждая клетка покрашена в какой-то цвет, причем в любой четырехклеточной фигурке вида  (фигурка может быть повернута или перевернута) цвета всех клеток разные. Какое наименьшее число различных цветов может быть в такой раскраске? (*С. Иванов*)

2. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM в точке P. Оказалось, что $BK = 2PM$. Докажите, что $AK = AP$. (*С. Иванов*)

3. Существуют ли три таких натуральных числа, что в любой паре из них остаток от деления большего числа на меньшее равен неполному частному? (*М. Антипов*)

4. Есть клетчатая полоска размера 1×75. На левых 25 клетках и на правых 25 клетках лежит по одному камню, а средние 25 клеток свободны. Федя и Саша играют в такую игру: они ходят по очереди, за один ход разрешается либо передвинуть один камень на одну клетку вправо, если та свободна, либо выкинуть один камень. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу, если первым ходит Федя? (*Ф. Бахарев, С. Иванов*)

. . . .

Олимпиада 2010 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle A$. На сторонах AB и AC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = XY = YC$. Докажите, что $3CY < 2BC$. (*С. Иванов*)

6. У часовщика есть 5 будильников (с 12-часовыми циферблатами). Каждый из них звонит, когда его стрелки показывают 12 часов. Будильники идут с правильной скоростью, но могут показывать неправильное время, отличающееся от истинного на целое число часов. В середине каждого часа часовщик выбирает один из будильников и переводит его стрелки на 1, 2, 3, 4, 5 или 6 часов вперед. Он стремится к тому, чтобы по истечении каждого часа хотя бы один из будильников зазвонил. Докажите, что рано или поздно он не сможет этого добиться. (*О. Иванова, С. Иванов*)

7. В ряд выписаны 2010 натуральных чисел, под каждым из них написана его сумма цифр. Может ли быть так, что каждое число в верхнем ряду больше предыдущего на одну и ту же величину, а каждое число в нижнем ряду больше предыдущего на 1? (*А. Храбров, С. Иванов*)