САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 9 класс.

1. Клетчатый квадрат 2007×2007 разбит на квадратики 1×1 и 2×2. Докажите, что найдется строка исходного квадрата, пересекающая нечетное количество квадратиков разбиения. (*С. Берлов*)

2. Различные натуральные числа a, b и c удовлетворяют условию $(a+b)(a+c) = (b+c)^2$. Докажите, что $(b-c)^2 > 4(b+c)$. (*С. Берлов*)

3. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ параллельно основаниям BC и AD, пересекает сторону CD в точке K. Окружность проходит через вершины A и B трапеции, пересекает ее основания BC и AD в точках X и Y соответственно и касается ее стороны CD в точке K. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения прямых AB и CD. (*С. Берлов*)

4. У Леши есть $2n$ монет ($n > 1$), более половины из которых настоящие. Известно, что все настоящие монеты весят одинаково, а вес любой фальшивой монеты отличается от веса настоящей (но разные фальшивые монеты могут иметь различные веса). Докажите, что за $2n-3$ взвешивания на двухчашечных весах без гирь Леша сможет найти хотя бы одну настоящую монету. (*Д. Карпов, А. Пастор*)

5. На доске написан трехчлен $x^2+25x+425$. Играют двое: за один ход можно вычесть единицу либо из коэффициента при x, либо из свободного члена. Выигрывает тот, после чьего хода впервые получится трехчлен, имеющий вещественный корень. Кто выиграет при правильной игре? (*О. Иванова*)

6. $ABCD$ — вписанный четырехугольник такой, что $BC = CD$. Точка E — середина диагонали AC. Докажите, что $BE + DE \geq AC$. (*А. Пастор*)

7. Рассмотрим расстановку a_1, a_2, …, a_{200} чисел 1 и -1 по кругу. Пусть A — количество перемен знака при обходе вдоль всего круга. Найдите сумму чисел $2^A \cdot a_1 \dots a_{200}$ по всем возможным расстановкам. (*Д. Карпов*)

8. Решите в натуральных числах уравнение $1^n + 2^n + \ldots + n^n = k!$. (*Ф. Петров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный тур. 10 класс.

1. В группе из 200 человек выполняется такое свойство: для любых двоих, не знакомых между собой, каждый из остальных либо знаком с ними обоими, либо незнаком с ними обоими. Докажите, что в этой группе можно найти либо 15 попарно знакомых, либо 15 попарно незнакомых между собой людей. (*С. Берлов*)

2. Различные натуральные числа a, b и c удовлетворяют условию

$$(a+b)(a+c) = (b+c)^2.$$

Докажите, что

$$(b-c)^2 > 8(b+c).$$

(*С. Берлов*)

3. Центр I вписанной окружности остроугольного треугольника ABC лежит на биссектрисе острого угла между высотами AA_1 и CC_1. Докажите, что $IA_1 = IC_1 = IL$, где L — основание биссектрисы угла B треугольника ABC. (*С. Берлов*)

4. К натуральному числу a разрешается прибавлять любую степень двойки, на которую делится число $a+1$. Докажите, что если начать с некоторого числа и каждую минуту проделывать эту операцию, то рано или поздно получится число, кратное 2007. (*С. Берлов*)

5. Окружность, проходящая через вершины A и C и ортоцентр остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках X и Y. На стороне AC выбраны точки Z и T так, что $ZX = ZY$ и $ZA = TC$. Докажите, что $BT \perp XY$.

(*А. Смирнов*)

6. На плоскости отмечены 50 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Костя соединяет эти точки отрезками, не имеющими друг с другом общих точек (в том числе общих концов). Костя уже провел 16 отрезков. Докажите, что он сможет провести еще один. (*К. Кохась*)

7. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению

$$(a^3+b^3)^4 = c^3+d^3.$$

Докажите неравенство

$$a^4c + b^4d \geq cd.$$

(*А. Храбров*)

8. Дан бесконечный набор попарно неравных прямоугольных параллелепипедов с целочисленными сторонами. Докажите, что один из этих параллелепипедов можно разбить на несколько меньших, каждый из которых равен одному из параллелепипедов набора. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 года ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный тур. 11 класс.

1. В законодательном собрании 200 депутатов. Журналисты “Хреновой газеты” обнаружили, что для любых двух, еще не подравшихся между собой депутатов, каждый из остальных либо уже подрался с ними обоими, либо не дрался ни с одним из них. Докажите, что можно образовать комиссию либо из 15 депутатов еще не дравшихся между собой, либо из 15 депутатов, любые два из которых уже дрались между собой. (*С. Берлов*)

2. Различные натуральные числа a, b и c удовлетворяют соотношению

$$(a+b)(a+c) = (b+c)^2.$$

Докажите, что

$$(b-c)^2 > 8(b+c).$$

(*С. Берлов*)

3. Натуральные числа от 1 до 2007 выписаны в строку. Два игрока ходят по очереди. Первый игрок своим ходом может произвольным образом переставить числа в строке. Второй игрок может выбрать три подряд идущих числа a, b и c и заменить их числами b и $a+c$. Когда в строке останутся два числа, первый выплачивает второму количество рублей, равное модулю разности этих чисел. Какой наибольший доход может обеспечить себе второй игрок? (*Ф. Бахарев*)

4. Окружность, проходящая через ортоцентр остроугольного треугольника ABC и вершины A и C, пересекает стороны AB и BC в точках X и Y. На стороне AC выбраны точки Z и T так, что $ZX = ZY$ и $ZA = TC$. Докажите, что $BT \perp XY$.
(*А. Смирнов*)

5. Существует ли такая непостоянная дробно-рациональная функция от двух переменных $F(x, y)$, что при любых положительных x и y имеет место равенство $F(x, y) = F(y, \frac{y+1}{x})$? (Дробно-рациональной называется функция, являющаяся отношением двух многочленов.) (*С. Дужин*)

6. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $(a^3+b^3)^4 = c^3 + d^3$. Докажите неравенство $a^4c + b^4d \geq cd$. (*А. Храбров*)

7. В пространстве дана сфера и точки A и B вне нее. Рассмотрим множество всех таких точек M, что прямые AM и BM касаются сферы. Докажите, что это множество содержится в объединении двух плоскостей. (*П. Мостовых*)

8. Дан бесконечный набор попарно неравных прямоугольных параллелепипедов с целочисленными сторонами. Докажите, что один из этих параллелепипедов можно разбить на несколько меньших, каждый из которых равен одному из параллелепипедов набора. (*С. Иванов*)