

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап

10 класс

1 марта 2015 г.

Время написания работы 4 астрономических часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Из пунктов A и B не одновременно выехали друг навстречу другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C , они тотчас развернулись и поехали обратно с теми же скоростями. Доехав до своих пунктов A и B , они снова развернулись, поехали и встретились второй раз в точке D . Здесь они вновь развернулись и так далее. В какой точке отрезка AB произойдёт их 2015-ая встреча?

10.2. Найти все значения параметров a, b, c , при которых система уравнений
$$\begin{cases} ax+by=c, \\ bx+cy=a, \\ cx+ay=b, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение (когда $x, y < 0$).

10.3 В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки P и Q соответственно такие, что $AP:PB=CQ:QA=2$. Пусть O – точка пересечения отрезков CP и BQ , доказать, что угол AOC – прямой.

10.4. 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000 таковы, что произведение любых двух из них является квадратом некоторого натурального числа. Доказать, что и сами числа являются квадратами натуральных чисел.

10.5. Окружность разбита на 21 равную дугу двадцатью одной точкой, являющимися вершинами правильного 21- угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности.